Propiedades de los límites de sucesiones reales

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} b_n = b$ se cumplen las siguientes propiedades:

1.- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

2.- $\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = a.b$

3.- $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$

4.- $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b$

5.- $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = a^b$

6.- $\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a$

Infinitésimos: a_n es infinitésimo si: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Infinitésimos equivalentes:

$$\left.\begin{array}{llll}
* \text{ Si } a_n \to 1 & \log a_n \simeq a_n - 1 & * \text{ Si } a_n \to 0 & \operatorname{sen} a_n \simeq a_n \\
* \text{ Si } a_n \to 0 & \log(a_n+1) \simeq a_n & * \text{ Si } a_n \to 0 & 1-\cos a_n \simeq a_n^2/2 \\
* \text{ Si } a>0 & \sqrt[n]{a} - 1 \simeq \frac{1}{n}\log a & * \text{ Si } a_n \to 0 & \operatorname{arc\,sen} a_n \simeq a_n \\
 & & * \text{ Si } a_n \to 0 & \operatorname{tg} a_n \simeq a_n
\end{array}\right\} n\to\infty$$

Infinitos: a_n es un infinito si: $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Infinitos equivalentes:

$$\left.\begin{array}{l}
* \; b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \dots + b_p \simeq b_0 n^p \\
* \; \log(b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + \dots) \simeq \log n^p \quad (b_0 > 0) \\
* \; n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (\text{Stirling})
\end{array}\right\} n\to\infty$$

Media aritmética: • $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n$

Media geométrica: • $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 . a_2 \dots a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n$

Criterio de la raíz: • $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Sucesiones del mismo orden: $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ son del mismo orden si: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Si $k = 1$ se dicen equivalentes.

Stolz: $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}$ si se cumple:

a) $\{B_n\}$ creciente con $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$

b) $\{B_n\}$ decreciente cumpliéndose: $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = 0$