3.8 MOVIMIENTO OSCILATORIO. (22 Problemas)

1.- Una partícula que realiza un movimiento armónico simple sobre una línea recta tiene velocidades de 8 cm/s y 2 cm/s cuando se encuentra a 3 y 5 cm respectivamente de su posición de equilibrio. Calcular la amplitud y el período del movimiento.

2.- La escala de un resorte dinamométrico capaz de pesar de 1 a 32 kg tiene 4 dm de longitud. Se cuelga un paquete de él y el resorte oscila verticalmente con una frecuencia de 4 osc/s. ¿Cuánto pesa el paquete?

3.- Un oscilador armónico simple es descrito por la ecuación

$$x = 4\,\mathrm{sen}(0.1\,t + 0.5)$$

donde todas las cantidades se expresan en el S.I.
Calcular:
a) La amplitud, período, frecuencia y fase inicial del movimiento.
b) Velocidad y aceleración.
c) Condiciones iniciales.
d) Posición, velocidad y aceleración para t=5 s.
e) Representar gráficamente x, v y a en función del tiempo.

4.- Un punto material oscila con movimiento armónico simple de amplitud 2 cm y frecuencia 10 vibraciones por segundo. Calcular la $v_{máx}$ y la $a_{máx}$, la "v" y la "a" para t=1/120sg, suponiendo que el origen de tiempos se ha tomado cuando el punto pasa por el centro del trayecto y hacia las abscisas positivas.

5.- Un punto se mueve a lo largo del eje X con movimiento vibratorio a lo largo de un segmento de 40 cm de longitud . Su punto medio coincide con el origen de coordenadas. En el instante t = 0 pasa por el punto (10,0,0) y su velocidad es de 15 cm/s. Hallar la ecuación del movimiento; su período ; el tiempo en que por primera vez pasa por el origen de coordenadas.

6.- Una masa de 2 kg cuelga de un muelle cuya constante de rigidez es k = 5 N/cm. Si tal masa se separa 5 cm de su posición de equilibrio y se deja en libertad, efectúa un movimiento vibratorio armónico. Calcular el correspondiente período y la energía elástica inicial.

7.- Un cuerpo de peso P colgado de un muelle elástico, aumenta la longitud de éste en una cantidad e. Si el cuerpo ejecuta oscilaciones verticales, probar:

a) Que su energía potencial a la distancia x de la posición de equilibrio es: $\dfrac{P\,x^2}{2\,e}$

b) Que la velocidad del cuerpo es $v^2 = v_0^2 - g\,\dfrac{x^2}{e}$

8.- Un punto material M de 100 g está animado de un movimiento rectilíneo bajo la acción de una fuerza F que lo atrae hacia un punto fijo O, de su trayectoria, proporcionalmente a la distancia OM. Cuando el punto está a 1 cm de O, F = 3,6 . 10^{-2} N. En el instante t = 0 el punto pasa por O, con velocidad de 30 cm/s. Determinar la abcisa x = OM en función del tiempo.

3.8 MOVIMIENTO OSCILATORIO. (22 Problemas)

9.- Un cuerpo suspendido de un muelle está oscilando verticalmente con una frecuencia de 4 Hz y una amplitud de 7 cm. Cuando alcanza su punto inferior se le añade una piedrecita, cuya influencia sobre la oscilación es prácticamente nula.

a) ¿A qué distancia por encima de la posición de equilibrio del cuerpo perderá su contacto la piedrecita con el mismo?
b) ¿Cuál es la velocidad de la piedra cuando deje el cuerpo?
c) ¿Cuál es la mayor distancia por encima de la posición de equilibrio del cuerpo que alcanzará la piedra?

10.- Un péndulo cuya longitud es de 2 m está situado en un lugar en el cual g=9,8 m/s². El péndulo oscila con una amplitud de 2º. Expresar en función del tiempo:

a) El desplazamiento angular.
b) La velocidad angular.
c) La aceleración angular.
d) La velocidad lineal.
e) La aceleración centrípeta.
f) La tensión de la cuerda si la masa es de 1Kg.

11.- Encontrar la ecuación del movimiento resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son: $x_1 = 6\,\mathrm{sen}\,2t$ y $x_2 = 8\,\mathrm{sen}(2t+\alpha)$, si $\alpha=0$, $\pi/2$, π. Hacer un gráfico de cada movimiento y del movimiento resultante.

12.- Encontrar la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de la combinación de dos movimientos armónicos simples perpendiculares cuyas ecuaciones son $x = 4\,\mathrm{sen}\,\omega t$ e $y = 3\,\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$ cuando $\alpha=0$, $\pi/2$, π. Dibuja el gráfico de la trayectoria de la partícula para cada caso y señala el sentido en el cual viaja la partícula.

13.- Dos movimientos armónicos, perpendiculares entre sí, del mismo período T=20 s, originan un movimiento que se describe con la ecuación y= 6x.

a) Sabiendo que para el movimiento vertical, y = 18 m al cabo de 5 s. Escríbase las ecuaciones de ambos movimientos, indicando las características de cada uno de ellos, frecuencia, amplitud, desfase, etc...
b) Descríbase y dibújese el movimiento resultante, definiendo su frecuencia, amplitud y la ecuación general de su trayectoria r (t). ¿Cómo sería el movimiento si tuviésemos y = -6x ?.
c) Determínese la velocidad y la aceleración de este movimiento. Demuéstrese que la fuerza que lo origina es una fuerza central. Si el movimiento lo realiza un cuerpo de masa M=4 Kg, determínese el valor de la constante de dicha fuerza.
d) Encuéntrese el momento cinético, L, de dicho cuerpo. ¿Valdría lo mismo en cualquier instante? . Razónese y explíquese.
e) Calcúlese el trabajo realizado por la fuerza entre los dos puntos extremos de la trayectoria y asimismo entre el origen y uno de los puntos extremos. Explíquese y coméntese este resultado.

14.- Sea un cilindro de radio r = 1 cm, altura h = 6 cm y densidad específica ρ = 0.8 que flota en agua reposada en posición vertical quedando parcialmente sumergido. Este cilindro se empuja ligera y verticalmente hacia abajo durante un instante.

a) Obtén la ecuación diferencial que describe el movimiento resultante.
b) Escribe su solución y especifica sus parámetros característicos.

3.8 MOVIMIENTO OSCILATORIO. (22 Problemas)

15.- Un bloque de 50 g de masa se sujeta al extremo libre de un resorte ideal que tiene una fuerza de restitución de 40 N por cada metro de extensión. El bloque se puede deslizar sobre una superficie horizontal sin fricción. Dicho bloque se pone en movimiento comunicándole una energía potencial inicial de 2 J y una energía cinética inicial de 1,5 J

a) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando pasa por la posición de equilibrio?
b) ¿En qué posición será igual la energía cinética a la potencial?
c) Calcula la amplitud, la frecuencia angular y el período de movimiento.
d) Si el desplazamiento inicial fue positivo y la velocidad inicial negativa, determina la fase inicial.
e) Escribe la ecuación del movimiento x (t) del bloque.

16.- Una partícula P de masa m = 2 gr se mueve a lo largo del eje x atraída hacia el origen O, por una fuerza F = 8.x (Dinas) y una fuerza amortiguadora cuya magnitud es ocho veces el valor de la velocidad instantánea. Si la partícula está inicialmente en reposo en x =20 cm, hallar la posición y velocidad de P en el instante t.

17.- Dos osciladores perpendiculares entre sí, tienen el mismo período, la misma amplitud y una diferencia de fase igual a $\pi/2$. ¿Qué oscilación resultante se produce?

18.- En el extremo de un muelle que cuelga del techo, cuya constante recuperadora es de 8 kg/cm, se suspende un cuerpo de masa m = 50 kg que se sumerge completamente en un fluido viscoso. La fuerza viscosa es proporcional a la velocidad y toma el valor de 250 N cuando la velocidad es de 60 cm/s. Cuando el sistema está en equilibrio, se alarga ligeramente el muelle y se libera. Deduce la ecuación diferencial del movimiento resultante.

a) Describe cualitativamente su solución y represéntala gráficamente.
b) Especifica los valores de sus parámetros característicos (ω_0 y γ)
c) ¿Qué ocurre cuando γ es muy pequeño? ¿y cuando γ es muy grande ?

19.- Una partícula de 5 gr de masa, se mueve a lo largo del eje x bajo la acción de dos fuerzas: una de atracción hacia el origen O, que en Dinas es igual a 40 veces la distancia instantánea a O; y otra fuerza amortiguadora proporcional a la velocidad instantánea, de tal manera que cuando la velocidad es de 10 cm/s, la fuerza amortiguadora es de 200 Dinas. Suponiendo que en t=0, la partícula está en reposo y a 20 cm de O:

a) Expresar la ecuación diferencial y las condiciones iniciales del movimiento.
b) Encontrar la posición de la partícula en el instante t.
c) Determinar la amplitud, el período, y la frecuencia de las oscilaciones.

20.- La ecuación del movimiento de un péndulo de longitud l=10 m, en unas determinadas condiciones es: $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega_o^2\theta = 0$$

a) Explíquese lo que representa dicha ecuación, indicando el significado de γ y dando el valor de ω_o.
b) Una solución de dicha ecuación es $\theta = \theta_o e^{-\alpha t}\cos\omega t$ ¿qué representa dicha ecuación? Demuéstrese que ésta es una solución de la ecuación del movimiento cuando se cumplen unas determinadas relaciones entre (γ,ω_o) y (α,ω). Expresar dichas relaciones.
c) Calcúlese el valor del coeficiente α y de ω, sabiendo que la amplitud del movimiento ha disminuido de 5° a 3° en 30 minutos.
d) Escríbase la expresión exacta de la solución θ y encuéntrese su valor al cabo de dos horas. Descríbase en ese instante la posición del péndulo.

3.8 MOVIMIENTO OSCILATORIO. (22 Problemas)

21.- La ecuación diferencial que describe el movimiento de una partícula sometida a una fuerza elástica F_e =-kx y una fuerza de fricción F_r =-λv debida a la viscosidad del medio en el que se produce el movimiento, viene dado por :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+kx=0\ .$$

Comprobar que la ecuación $x = A e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$ es una solución de la ecuación diferencial siendo A y α constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales y $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\lambda^2}{4m^2}}$.

Si además, sobre la partícula, actúa una fuerza oscilante externa tal como $F = F_0\cos(\omega_F t)$, la ecuación diferencial que rige el movimiento de la partícula es ahora:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+kx=F_o\cos\omega_F t$$

Comprobar que una solución particular es x =A sen(ω_F t - α) donde A y α no son constantes arbitrarias sino que deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\alpha=\mathrm{arctg}\ \frac{m\omega_F^2-k}{\lambda\omega_F} \qquad \text{y} \qquad A=\frac{F_o}{\sqrt{(m\omega_F^2-k)^2+\lambda^2\omega_F^2}}$$

22.- Tenemos un péndulo formado por un disco homogéneo de radio R y masa M y una barra también homogénea de longitud L y masa m unidos entre sí. Calcular:

a) La posición del C.M. de dicho péndulo.
b) Su momento de inercia respecto del eje de rotación que pasa por el enganche A.
c) El periodo de las pequeñas oscilaciones alrededor de la vertical.
d) Si se suelta desde un ángulo θ con la vertical, calcular la fuerza que el enganche A realiza sobre dicho péndulo cuando pase por la vertical.