3.1 CÁLCULO VECTORIAL. (37 Problemas)

1.- Dados los vectores (1,2,-1) y (0,4,1). Calcular sus módulos, ángulos de orientación del vector y productos escalar y vectorial.

2.- Encontrar el vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{A} = (4,-1,3)$ y $\vec{B} = (-2,1,-2)$

3.- Encontrar el área del paralelogramo cuyas diagonales son

$$\vec{A} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}\,.$$

4.- Demostrar que los vectores $\vec{A} = (3, -2, 1)$, $\vec{B} = (1, -3, 5)$ y $\vec{C} = (2, 1, -4)$ forman un triángulo rectángulo. Calcular el valor de los otros dos ángulos del triángulo.

5.- Calcular el área del triángulo del problema anterior. Deducir de esta forma el teorema de los senos en trigonometría.

6.- Si un vector forma con los ejes X e Y ángulos de 60º y tiene de módulo 4 unidades. Calcular:

a) Sus componentes coordenadas.
b) Ángulo que forma con eje Z.

7.- Dados los vectores $\vec{a}\,(1, -1, 2)$ y $\vec{b}\,(-1, 3, 4)$. Calcular:

a) El producto escalar de ambos vectores.
b) El ángulo que forman.
c) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

8.- Demostrar que en una semicircunferencia cualquier triángulo inscrito con el diámetro como uno de sus lados es un triángulo rectángulo.

9.- Los vectores $\vec{a} = (-1,3,0)$ y $\vec{b} = (2,-1,5)$ están aplicados en el punto (-1,3,0). Compruébese el teorema de Varignon tomando como centro de momentos el punto (-2,1,-3)

10.- Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$; a) Calcular el doble producto vectorial. b) Demostrar que ese doble producto es coplanario con los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$

11.- En un paralelogramo se conocen las coordenadas de tres vértices (consecutivos) A (-1, 3, 2) B (2, -1, 5) C (0, -3, -4). Calcular:

a) El cuarto vértice.
b) El área del paralelogramo.
c) El ángulo en B.

12.- Calcular $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\vec{a}\,.\,\vec{b}}\right)$ siendo $\vec{a} = t\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, para t = 2s.

13.- Demuéstrese que si la suma y diferencia de dos vectores tienen el mismo módulo, entonces son perpendiculares.

14.- Demostrar que el vector unitario $\vec{a}$, cuyos cosenos directores son: $\cos\alpha = 1/3$ $\cos\beta = 2/3$ y $\cos\gamma > 0$ es perpendicular al vector $\vec{b}\,(6, -9, 6)$

3.1 CÁLCULO VECTORIAL. (37 Problemas)

15.- Definido un sistema de referencia cartesiana en el plano OXY, y en él dos vectores unitarios cualesquiera $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ que forman los ángulos α y β respectivamente con la dirección positiva del eje OX

a) Demostrar que:
$$\vec{u}_1 = \cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$$
$$\vec{u}_2 = \cos\beta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\beta\,\vec{j}$$

b) Calcular por aplicación del producto escalar de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ el valor de cos (α-β)

c) Calcular por aplicación del producto vectorial de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ el valor de sen (α -β)

16.- Dados los vectores $\vec{A}_1(3,-2,1)$ aplicado en $P_1(1,2,1)$; $\vec{A}_2(2,3,1)$ aplicado en $P_2(-1,0,1)$; $\vec{A}_3(1,-1,2)$ aplicado en P_3 (2,1,1). Hallar el momento resultante respecto al origen de coordenadas y respecto al punto (1,1,1).

17.- Dado el vector $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ aplicado en p(1,0,-1) hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo momento sea paralelo al plano 3x + 2y - z = 0.

18.- Dado un vector de módulo 3 aplicado en el punto $P_1(2,3,0)$ y tal que forma ángulos de 30º, 60º y 90º con los ejes x, y, z. Hallar su momento con respecto al punto $P_2(5,3,-7)$

19.- Tenemos un vector de proyecciones sobre los ejes coordenados (7,3,-4) y otro que, teniendo 25 por módulo, sus cosenos directores son proporcionales a 2,-2,1. Determinar el producto escalar de ambos vectores y el ángulo que forman.

20.- Dados los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 11\vec{j} + 2\vec{k}$. Hallar a) el producto escalar de ambos. b) el vector del plano XZ que es perpendicular a $\vec{a}$ y tiene un módulo igual al producto de los módulos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

21.- Dado el vector $\vec{a} = A\left(\cos\omega t\,\vec{i} + \operatorname{sen}\omega t\,\vec{j}\right)$ donde A y ω son constantes y t es la variable escalar independiente, se pide:

a) Hallar su módulo y la derivada de éste.

b) $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$ y $\left|\dfrac{d\vec{a}}{dt}\right|$

c) Demostrar que $\vec{a}$ y $d\vec{a}/dt$ son perpendiculares.

22.- Si $\vec{v}$ es un vector función de un parámetro t demostrar que:

a) Si $\vec{v}$ es constante en dirección, entonces $\vec{v} \wedge d\vec{v}/dt = 0$

b) Si $\vec{v}$ es constante en módulo, entonces $\vec{v} \cdot d\vec{v}/dt = 0$

23.- Dadas las funciones vectoriales $\vec{r}_1 = e^{-at}\vec{i} + e^{-2at}\vec{j}$ y $\vec{r}_2 = e^{-2at}\vec{j} + e^{-at}\vec{k}$ calcular: $d/dt\ (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$. 1º Aplicando las reglas de derivación vectorial. 2º Calculando $\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2$ y derivando luego respecto a t.

24.- Siendo $\vec{R}$ el vector de componentes $(1/t,\ t^2,\ e^{-t})$, calcular : $\dfrac{d\vec{R}}{dt}$, $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$, $\dfrac{d\vec{R}}{dt}$, $\left|\dfrac{d\vec{R}}{dt}\right|$, $\left|\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|$, $\int \vec{R}\,dt$

3.1 CÁLCULO VECTORIAL. (37 Problemas)

25.- Sea el vector $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ aplicado en P (3,1,-2). Hallar el momento del vector respecto al punto A(1,0,1) y respecto al eje que pasa por los puntos A(1,0,1) y B(1,2,1).

26.- Dado el escalar $V = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, hallar el momento de su gradiente en el punto M(1,1,1) respecto del origen de coordenadas.

27.- Si $\vec{A} = x^2\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{B} = 3x\vec{i} - z\vec{k}$, $\vec{C} = y^3\vec{j} + 2z\vec{k}$. Hallar el gradiente de $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$

28.- Dado el campo vectorial $\vec{A} = x^2\vec{i} + \text{sen}\, y\vec{j} + zx\vec{k}$, hallar: $\vec{\nabla}\vec{A}$, $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

29.- Tres campos escalares están definidos por las funciones $F = ax^2 + y^2 - 2z$; $G = by^2 + z^2 - 2x$; $H = cz^2 + x^2 - 2y$. Determinar los parámetros a, b y c con la condición de que las superficies isoescalares correspondientes sean mutuamente ortogonales en el punto P (1,-2,1)

30.- Si $\vec{A} = x^2yz\,\vec{i} - 2xz^3\,\vec{j} + xz^2\,\vec{k}$ y $\vec{B} = 2z\,\vec{i} + y\,\vec{j} - x^2\,\vec{k}$. Hallar $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\vec{A} \wedge \vec{B}\right]$ en el punto P (1, 0, -2)

31.- Dada la superficie $x^3y - z^2y^2 + xz^3 = 5$, y ayudándonos de la relación gráfica que existe entre los campos escalares y sus campos vectoriales conservativos asociados, encontrar:

a) La ecuación de una recta que sea perpendicular a ella en el punto P de coordenadas (1, 1, 2)
b) La ecuación del plano tangente a dicha superficie en dicho punto.

32.- Siendo $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$, hallar $\int_c \vec{A}.d\vec{r}$ a lo largo de las siguientes trayectorias C:

a) $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ desde t=0 hasta t=1
b) La quebrada que une los puntos (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)
c) La recta que une los puntos (0,0,0) y (1,1,1)

33.- Utilizando la teoría de vectores:

a) Determinar la distancia del punto P de coordenadas (1,0,2) a la recta que pasa por los puntos A y B de coordenadas (-1,0,1) y (2,0,0) respectivamente.
b) Encontrar la ecuación del plano perpendicular a dicha recta y que pasa por el punto A.
c) Determinar la distancia del punto P a dicho plano.
d) Indicar un posible campo de fuerzas conservativo (hay muchos) para el cual su campo escalar de energía potencial posea una superficie equiescalar tangente en el punto A al plano del apartado b)

3.1 CÁLCULO VECTORIAL. (37 Problemas)

34.- Dado el campo vectorial conservativo

$$\vec{A} = (2xy - z^2)\,\vec{i} + (x^2 + 2z)\,\vec{j} + (2y - 2xz)\,\vec{k}\text{, calcular:}$$

a) El campo escalar $\phi(x, y, z)$ del cual deriva.
b) La ecuación de la superficie equiescalar que pasa por el punto (1,1,1).
c) Un vector perpendicular a dicha superficie en dicho punto.
d) La ecuación del plano tangente a dicha superficie en dicho punto.
La distancia del origen a dicho plano.

35.- Sean dos fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ cuyas componentes son:

$F_{AX} = 9\,a\,y\,z^3 - 10x^3\,y^2$ $F_{BX} = 3\,a\,y\,z^3 - 10x^3\,y^2$
$F_{AY} = 9\,a\,x\,z^3 - 5x^4\,y$ $F_{BY} = 3\,a\,x\,z^3 - 5\,x^4\,y$
$F_{AZ} = 3\,a\,x\,y\,z^2$ $F_{BZ} = 9\,a\,x\,y\,z^2$
donde a = constante

a) Determínese si las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ son conservativas.
b) Determinar el potencial del que se derivan, en el caso que sean conservativas.
c) Calcúlese el trabajo realizado por las fuerzas conservativas cuando se desplazan desde el punto C (0,0,1) al D (2,4,1). En los casos siguientes:

c.1. A lo largo de la recta y=2x (z=1) $\vec{r} = t\,\vec{u}_x + 2t\,\vec{u}_y + \vec{u}_z$
c.2. A lo largo de la parábola y=x² (z=1) $\vec{r} = t\,\vec{u}_x + t^2\,\vec{u}_y + \vec{u}_z$
c.3. Sin utilizar cálculo integral.
Coméntense estos resultados.

36.- a) ¿Qué valores deben de tener las constantes a y b para que el siguiente campo de fuerzas sea conservativo?:

$$\vec{F} = \left(\frac{6y}{x^3} + z^2\right)\vec{i} - \frac{a}{x^2}\,\vec{j} + bxz\,\vec{k}$$

b) Calcular el campo de energía potencial del que deriva.
c) Calcular un vector unitario perpendicular a la superficie de energía potencial constante que pasa por el punto P de coordenadas (1,0,1)
Calcular el trabajo realizado por dicho campo de fuerzas conservativo al actuar sobre una partícula que se mueve del punto A (1,0,0) al B (2,1,1) a lo largo de la trayectoria: $x=t$, $y=(t-1)$, $z=(t-1)^2$

37.- Dado el campo vectorial

$$\vec{A} = \left(y.\ln z - \frac{y}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{a}{x} + x.\ln z\right)\vec{j} + b\,\frac{xy}{z}\,\vec{k}\ :$$

a) ¿Qué valores deben tomar los parámetros a y b para que sea un campo conservativo?. Para dichos valores, encontrar:
b) El campo escalar ϕ del que deriva.
c) La circulación de $\vec{A}$ para una trayectoria que vaya del punto (1,1,1) al punto (2,2,2) y cuya ecuación en paramétricas es $x=t$, $y=t$, $z=t$