1.21 EJERCICIOS DE REPASO SOBRE INTEGRACIÓN (69 Ejercicios)
(39 Cuestiones – 30 Problemas)

1.-
La condición necesaria y suficiente para que la función F (x) tenga primitiva en un intervalo $I \subset R$ es que:
a) Sea derivable en I.
b) Sea diferenciable en I.
c) Sea continua en I.
d) Esté definida en I.

2.-
La primitiva de la función $f(x) = \dfrac{k}{a^2 + x^2}$ con k, a $\in$ R es:
a) $F(x) = k \text{ arccos } ax + C$
b) $F(x) = k \text{ arctg } \dfrac{x}{a}$
c) $F(x) = \dfrac{k}{a^2} \text{ arctg } \dfrac{x}{a} + C$
d) Ninguna de las anteriores.

3.-
Si f (x) es integrable en I, entonces es cierto que:
a) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$
b) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx$
c) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x) + C$
d) Ninguna de las anteriores.

4.-
La solución de la integral $\int k^{ax}\,dx$ es:
a) $\dfrac{k^{ax}}{a \log k} + C$
b) $\dfrac{k^{ax}}{\log k} + C$
c) $\dfrac{k^{ax}}{a} + C$ d) Ninguna de las anteriores.

5.-
La solución de la integral $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ es:
a) $\dfrac{1}{a} \text{ arccos } \dfrac{x}{a} + C$
b) $\dfrac{1}{a} \text{ ArgCh } \dfrac{x}{a} + C$
c) $\dfrac{1}{a} \text{ ArgSh } \dfrac{x}{a} + C$ d) Ninguna de las anteriores

6.-

¿Cuál sería un buen procedimiento para resolver la integral $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx$?

a) Integrando por partes.
b) Haciendo el cambio $\cos x = t$
c) Haciendo el cambio $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$
d) No se puede resolver.

7-.

Sea R (x) una función racional de x. La primitiva más general de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$ es de la forma:

a) $F(x) = A_1 \log(u(x)) + A_2 \operatorname{arctg} x + C$
b) $F(x) = R(x) + A_1 \log(u(x)) + A_2 \operatorname{arctg} x + C$
c) $F(x) = R(x) + k \operatorname{arctg} x + C$
d) $F(x) = R(x) + k \log(u(x)) + C$

8.-

La primitiva más general de la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + x + 1}$ es una combinación lineal de las siguientes funciones:

a) Logarítmica y arco tangente.
b) Racional, logarítmica y arco seno.
c) Racional y arco tangente.
d) Racional, logarítmica y arco tangente.

9.-

¿Cuál de las siguientes funciones es la solución de la integral $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ si $ac - \dfrac{b^2}{4} > 0$?

a) $\operatorname{Arg\,Sh}(f(x)) + C$
b) $\operatorname{Arg\,Ch}(f(x)) + C$
c) $\operatorname{arcsen}(f(x)) + C$
d) $\arccos(f(x)) + C$

10.-

¿Cuál sería un buen procedimiento para resolver la integral $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$?

a) Haciendo el cambio x = a Ch t
b) Haciendo el cambio x = a sen t
c) Haciendo el cambio x = a Sh t
d) Haciendo el cambio x = a tg t

11.-

Se desea calcular la integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ aplicando la definición. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la correcta?

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$

b) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i \log n}{n}$

d) Ninguna de las anteriores

12.-
El valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ es:

a) $\operatorname{arcsen} \frac{2}{\pi}$ b) $\frac{2}{\pi}$ c) $\frac{1}{\pi}$ d) 0

13.-

Si $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 3$ y $\int_{-2}^{7} f(x)\,dx = -5$, entonces:

a) $\int_1^7 f(x)\,dx = -2$

b) $\int_1^7 f(x)\,dx = 2$

c) $\int_1^7 f(x)\,dx = -8$

d) Ninguna de las anteriores

14.-

El valor de la integral $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ es:

a) 1
b) -1
c) 0
d) Ninguno de las anteriores.

15.-

La derivada de la función $g(x) = \int_x^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ es:

a) $\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

b) $\log(\operatorname{sen} x)$

c) $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

d) Ninguno de las anteriores.

16.-
Sea f una función continua en [a,b] y $c \in R$, entonces:

a) $\int_{a-c}^{b-c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

c) $\int_{a+c}^{b+c} f(x+c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ d) Ninguno de las anteriores.

17.-
Sabiendo que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ se deduce que:

a) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi$

b) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = 2\pi$

c) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ d) Ninguna de las anteriores.

Indicar si son verdaderas o falsas:

18.-

a) $\int_0^3 \frac{dx}{x-2} = \ln 2$

b) $\int_1^{\infty} \sqrt[3]{x}\,dx$ es divergente.

19.-
a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -2$

b) El área de la región entre la parábola $x = 4y - y^2$ y la recta $y = \frac{x+3}{2}$ es $\frac{32}{3}$

20.-
a) El volumen del cono generado por el segmento de recta y = x-1 cuando $x \in [0,1]$ al girar alrededor del eje x es $\frac{1}{3}$

b) La longitud de la circunferencia $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ es 2π

21.-

a) Las coordenadas polares $\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$ y $\left(-5, \frac{\pi}{4}\right)$ representan el mismo punto del plano.

b) Si las coordenadas cartesianas de un punto son $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ sus coordenadas polares son $\left(-3, \frac{5\pi}{4}\right)$

22.-

a) La ecuación polar r = sec x y la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = y$ representan la misma curva.

b) La pendiente de la cardioide $r = 1+\cos\theta$ en el punto $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ es $-\frac{1}{2}$

23.-

a) La ecuación cartesiana de la trayectoria plana $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 3\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j}$ es $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

b) La pendiente de la curva $x = e^t\,\mathrm{sen}\,t$, $y = e^t\cos t$ en un punto genérico t es $\frac{\cos t - \mathrm{sen}\,t}{\cos t + \mathrm{sen}\,t}$

24.-

a) $\int_0^1 \left[\int_0^{2x} (x+y)\,dy\right] dx = \int_0^2 \left[\int_{y/2}^{2} (x+y)\,dx\right] dy$

b) $\int_0^2 \left[\int_1^{e^x} (x+y)\,dy\right] dx = \int_1^{e^2} \left[\int_{\ln y}^{2} (x+y)\,dx\right] dy$

25.-

a) Sea D la región del primer cuadrante tal que $1+\cos\theta \le r \le 3\cos\theta$ entonces el área de dicha región en coordenadas polares viene dada por $\int_0^{\pi/3}\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \frac{1}{\cos\theta}\,dr\,d\theta$.

b) El área interior a la curva $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ cuando $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ es $\frac{\pi}{8}$

26.-

a) Sea $D = [0,b]\,x\,[0,d]$ entonces $\iint_D 4xy\,dx\,dy = b^2 d^2$

b) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ y $D = \{(x,y) / x^2 + y^2 \le 4\}$, entonces $4\pi \le \iint_D f(x,y) \le 20\pi$

27.-

a) La integral $\int_0^{\pi}\int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} dr\,d\theta$ representa el área interior a la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ para $0 \le \theta \le \pi$

b) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n}\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]=\frac{2}{3}$

28.- Seleccione el o los segmentos de recta que son tangentes a la curva $\{x=\operatorname{sen} 2t,\ y=\operatorname{sen} t\}$ en el punto correspondiente a $t = \pi/3$

$R1=\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2}-u \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{u}{2}\end{cases} \quad u\in[-1,1]$ $\qquad R2=\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2}-u \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{u}{2}\end{cases} \quad u\in[-1,1]$ $\qquad R3=\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-2v \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+v\end{cases} \quad v\in[0,1]$

29.- Entre los siguientes puntos, expresados en coordenadas polares, elija aquel o aquellos por los que no pasa la curva de ecuación polar $\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$

1) $[-2,-\pi/2]$ 2) $[1,\pi]$ 3) $[-1,\pi]$

30.- Asocie a cada uno de los arcos de curva que se presentan con su representación polar.

$\rho=2\cos\theta,\quad \theta\in[0,\pi/2]$

$\rho=2\cos\theta,\quad \theta\in[0,\pi]$

$\rho=2\cos\theta,\quad \theta\in[0,\pi/4]$

a) semicircunferencia centro (1,0) y radio 1, en primer cuadrante.
b) Circunferencia centro (1,0) y radio 1
c) Cuadrante circunferencia centro (1,0) y radio 1, en primer cuadrante, la derecha de x=1
d) Semicircunferencia entre centro (0,0) y radio 2, en primer y segundo cuadrante.
e) Ninguna de las anteriores.

31.- Siendo K la constante de integración y c el número real, seleccione la(s) verdadera(s):

1) $\int f(x)dx = F(x)+k \quad\rightarrow\quad \int f(x+c)dx=F(x+c)+k$
2) $\int f(x)dx = F(x)+k \quad\rightarrow\quad \int f(x+c)dx=F(x)+c+k$
3) $\int_a^b f(x)=I \quad\rightarrow\quad \int_a^b f(x+c)\,dx=I+c$
4) $\int_a^b f(x)=I \quad\rightarrow\quad \int_a^b f(x+c)\,dx=I+f(c)$

32.- Elija la opción correcta para la derivada de F (x) en x = 0, siendo $F(x)=\int_0^{x^2+2}\frac{dt}{1+t^2}\quad\int_0^x e^{t^2}\,dt$

1) F' (0) = arctan 2
2) F' (0) = arctan 2-e^2
3) F' (0) = 0 4) F (0) = no es derivable en x = 0

33.- Sea f (x) una función continua par. Sea p el valor promedio de f en el intervalo [-a, a] con a distinto de cero. Elija la opción verdadera:

1) p es cero.
2) p coincide con el valor promedio de f en [0, a]
3) p es el doble del valor promedio de f en [-a, a]
4) Ninguna de las anteriores es verdadera.

34.- Seleccione aquel (los) conjunto(s) que describe la región finita encerrada entre las dos curvas siguientes, $x = y^2 - 2$, $y = x$

1) $A=\left\{ (x,y) / -1 \le y \le 2 , y^2 -2 \le x \le y \right\}$
2) $B=\left\{ (x,y) / -1 \le y \le 2 , y \le x \le y^2 - 2 \right\}$
3) $C=\left\{ (x,y) / -2 \le x \le -1 , -\sqrt{x+2} \le y \le \sqrt{x+2} \right\}$
4) $D=\left\{ (x,y) / -2 \le x \le 2 , x \le y \le \sqrt{x+2} \right\}$

35.- Seleccione aquel(los) conjunto(s) que describe la misma región que $\left\{ (x,y) / 0 \le y \le 2 , \sqrt{4-y^2} \le x \le 2\sqrt{4-y^2} \right\}$

1) $\left\{ (r,\theta) / 0 \le \theta \le \pi/2 \ , 2 \le r \le 4 \right\}$
2) $\left\{ (r,\theta) / 0 \le \theta \le \pi/2 \ , 2 \le r \le 4 / \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta} \right\}$
3) $\left\{ (r,\theta) / 0 \le \theta \le \pi/2 \ , 2 \le r \le 4 / \sqrt{\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta} \right\}$

36.- Seleccione la opción que corresponde al cálculo del área superficial de la porción de $x^2 + y^2 = 2ax$ que está limitada inferiormente por $z = 0$ y superiormente por $x^2 + y^2 = z^2$

1) Área = $\iint_D \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\, dA$ con $D=\left\{ (x,z) / 0<x<2a \ , 0 \le z \le \sqrt{2ax} \right\}$ e $y=\sqrt{2ax-x^2}$
2) Área = $2\iint_D \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\, dA$ con D e y iguales que la opción anterior
3) Área=
$\iint_R \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dA = \sqrt{2}\pi a^2$ con $R=\left\{ (x,y) / 0<x<2a \ , -\sqrt{2ax-x^2} \le y \le \sqrt{2ax-x^2} \right\}$
y $z=\sqrt{x^2+y^2}$

37.- Sean S una superficie cerrada, dS su elemento diferencial de superficie y n la normal unitaria a S. ¿Cuáles de entre las siguientes expresiones evalúan, en las condiciones de regularidad suficientes, al área superficial de S?

1) $I1=\iint_S dS$
2) $I2 = \iint_{R_{xy}} \frac{dA}{\cos\gamma}$ con γ = ángulo entre n y k , $\gamma \in \left[0, \frac{p}{2}\right]$ R_{xy} = proyección de S en el plano XY
3) $I3=\iiint_H \left(\operatorname{div} \overset{r}{n}\right) dV$ siendo H el sólido tal que $\partial H = S$

38.- De entre las siguientes magnitudes. Marque las que se anulan. Se supone que los campos, superficies y curvas satisfacen las condiciones suficientes de regularidad como para que todas estas magnitudes estén definidas mediante integrales y se verifiquen los teoremas de integración vectorial.

1) Flujo de un campo vectorial con rotacional nulo, a través de una superficie cerrada.
2) Flujo de un campo vectorial que es rotacional de otro, a través de una superficie cerrada.
3) Trabajo de una campo vectorial con rotacional nulo, sobre una curva cerrada.
4) Trabajo de un campo vectorial que es rotacional de otro, sobre una curva cerrada.

39.- Si f y g son campos escalares diferenciables, la expresión para $\operatorname{div}\left(f\,\vec{\nabla} g\right)$

1) $\left(\operatorname{div} f\right)\vec{\nabla} g + f\ \operatorname{div}\vec{\nabla} g$
2) $f\ \operatorname{div}\vec{\nabla} g$
3) $\left(\operatorname{div}\ f\right)\vec{\nabla} g$
4) Ninguno de los anteriores.

PROBLEMAS (30 Problemas)

40.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 42}$

41.- Calcular $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

42.- Supóngase que f tiene una derivada positiva para todos los valores de x, y que f (1)=0. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre la función $y = \int_0^x f(t)\,dt$ son ciertas?

a) y es una función diferenciable de x.
b) y es una función continua de x.
c) La gráfica de f tiene una tangente horizontal en x=1.
d) y tiene un máximo local en x=1.
e) y tiene un mínimo local en x=1.
f) La gráfica de y tiene un punto de inflexión en x=1.
g) La gráfica de $\frac{dy}{dx}$ corta al eje x en x=1.

43.- Calcular el volumen del sólido generado cuando la región cuyo contorno son las curvas $x = 4y - y^2$, $x = 0$ gira alrededor del eje y.

44.- Se considera la curva cuya ecuación polar es $r = a\,(1+\cos\theta)$ con $a > 0$.

a) Obtener los puntos de tangente horizontal y de tangente vertical. Expresar dichos puntos en polares y en cartesianas.
b) Obtener la diferencial de arco en polares y plantear sin resolver las integrales que permitirían calcular el área interior a la curva y su longitud.

45.- Calcular $\iint_R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,dy$ siendo R el triángulo del plano XY acotado por el eje x, la recta $y = x$ y la recta $x = 1$

46.- Calcular, en coordenadas cilíndricas, la siguiente integral triple:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}(x^2+y^2)\,dz\,dx\,dy$$

47.- Probar que el valor de $\oint_C xy^2dx + (x^2y + 2x)dy$ alrededor de cualquier cuadrado solo depende del tamaño de éste, y no de su situación en el plano.

48.- Hallar la masa de una lámina delgada de densidad $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2$ cuya forma es la de la superficie cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ comprendida entre los planos $z = 0$, $z = 1$

49.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{z+1}{\sqrt[3]{z^2+2z+2}}\,dz$ b) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$

50.- a) Calcular el siguiente límite utilizando una integral definida:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

b) Calcular $\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos x + |\cos x|\right)dx$

51.- a) Calcular $f(4)$ si $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos \pi x$

b) Calcular el valor promedio de la función $f(x) = A\operatorname{sen}\omega x$ en $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$. ¿Qué significado tiene este valor?. Hacer una interpretación geométrica del mismo.

52.- a) Demostrar que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx$

b) Calcular $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec x \operatorname{sen} x\, dx$

53.- Calcular el área encerrada por las curvas $y^2 = 4x$ e $y = 4x - 2$

54.- a) Obtener la ecuación en cartesianas e identificar la forma de las curvas cuyas ecuaciones polares son:

a1) $r = 4\cos\theta$ a2) $r = \frac{4}{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

b) Hallar la ecuación en cartesianas de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $0 \le t \le 2\pi$. ¿ Cuál es la pendiente de dicha curva en $t = \frac{\pi}{4}$?

55.- a) Escribir en cartesianas la ecuación de la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es: $\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2$

b) Escribir en esféricas la ecuación de la superficie cuya ecuación en cartesianas es: $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

c) Escribir en cartesianas la ecuación de la superficie cuya ecuación en cilíndricas es: $z^2 = r^2$

56.- a) Escribir los límites de la siguiente integral doble invirtiendo el orden de integración: $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x, y)\, dx\, dy$

b) Escribir los límites de la siguiente integral triple en coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 dz\, dr\, d\theta$

57.- a) Dar una interpretación física y una geométrica de la integral de línea $\int_C f(x, y)\, ds$

b) ¿Qué es un campo vectorial?. Poner un ejemplo de campos vectoriales bidimensionales y tridimensionales.

c) Si $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ y S es una superficie de nivel de f y C una curva sobre S. ¿Es cierto que $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = 0$? ¿Por qué?

58.- Calcular $\oint_C (e^x \cos y + yz)\, dx + (xz - e^x \operatorname{sen} y)\, dy + (xy + z)\, dz$ siendo C la elipse de semiejes a y b situada en z = 0

59.- Comprobar el teorema de Gauss para el campo $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ y la región

$1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$

60.- a) Calcular el flujo del rotacional del campo $\vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$ a través de la superficie compuesta por el semicilindro $z = \sqrt{1 - x^2}$ con $-2 \le y \le 2$ y los semicírculos $z = \sqrt{1 - x^2}$ situados en los planos y = –2 e y = 2

b) Comprobar el resultado aplicando el teorema de Stokes.

61.- Sea $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

a) Encontrar el desarrollo en serie de potencias de x – 1 de la función f (x).

b) Encontrar la primitiva de $\dfrac{f(x)}{(x-1)^5}$

62.- a) Calcular la integral $\int \sqrt{1 - \cos x}\, dx$

b) Calcular $\int x \sqrt{a^2 + b^2 x^2}\, dx$ con $a, b \in \mathbb{R}$

63.- Sea f (x) una función con una discontinuidad en un punto $x_0 \neq 0$. ¿Qué posibilidades hay para el radio de convergencia del desarrollo de f (x) en potencias de x ?

64.- Encontrar la expresión del elemento diferencial de arco en coordenadas polares a partir de su expresión en coordenadas cartesianas.

65.- Encontrar el área A (z_0) de la sección perpendicular al eje z por z = z_0 del sólido encerrado por $4x^2 + y^2 + z^2 = 64$

66.- Plantear la integral que conduce al área encerrada por la curva de ecuación polar $\rho = \cos\theta$

67.- Deducir la integral en (-∞, ∞) en valor principal de la función: $\mathrm{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

68.- Sea f un campo escalar diferenciable con las siguientes propiedades:

$$\left|\vec{\nabla} f\right|^2 = 4f \qquad div\left(f\,\vec{\nabla} f\right) = 10\,f$$

Calcular la integral de superficie $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\,dS$

Donde S es la superficie frontera del sólido H situado en el semiespacio $z \geq 0$ y limitado por las tres superficies $z = x\,y$, $x^2 + y^2 = 1$ y $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

69.- Se desean construir baldosas cuadradas de lado unidad grabando en ellas dos curvas que unan los vértices de la diagonal principal y dividan los ángulos correspondientes en tres partes iguales. La región interior a las curvas se pinta de un color y la exterior de otro. Si las curvas son arcos de polinomio de grado tres, obtener la relación entre la cantidad de ambos colores.