

1.20 CUESTIONES SOBRE FUNCIONES DE UNA VARIABLE, SERIES DE POTENCIAS Y FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. (46 Cuestiones)

1.- Una función $f(x)$ es derivable infinitas veces y tiene sus tres primeras derivadas nulas en $a = 5$ y la derivada cuarta en dicho punto tiene valor 7.

Entonces se puede asegurar que:

- a) $f(x)$ tiene un máximo en $a = 5$
- b) $f(x)$ tiene un mínimo en $a = 5$
- c) $f(x)$ es creciente en un entorno de $a = 5$
- d) $f(x)$ es decreciente en un entorno de $a = 5$

2.- En primer término no nulo del desarrollo de Taylor, en el origen, de la función $f(x) = \operatorname{tg}x - \operatorname{sen}x$ es:

- a) $\frac{x}{2}$
- b) $\frac{x^2}{2}$
- c) $\frac{x^3}{2}$
- d) Ninguna de las anteriores.

3.- En el origen de la función $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}}{\sqrt[5]{x}}$

- a) Es un infinitésimo de orden $2/3$
- b) Es un infinitésimo de orden $3/2$
- c) Es un infinitésimo de orden $2/3 - 1/5$
- d) Es un infinitésimo de orden $3/2 - 1/5$

4.- Sea $z = f(x,y)$ una función continua y con derivadas parciales continuas en el punto

$(1,2)$ entonces si $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 1, \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1$ entonces

- a) La dirección de máximo crecimiento de la función en ese punto es la norma del gradiente.
- b) Si desde el punto $(1,2)$ nos vamos en la dirección del eje y positivo el valor de z aumenta.
- c) Sea S el plano tangente a la superficie dada por $z = f(x,y)$ en el punto $(1,2, f(1,2))$, entonces un vector normal a S en el punto $(1,2, f(1,2))$ es $n = (-1, 1, 2)$
- d) Ninguna de las anteriores.

5.- Supongamos que la ecuación $\operatorname{sen}(xy) + x^2y = 0$ define a y como función de x (es decir, $y = f(x)$) en las proximidades del punto $(1,0)$. La aproximación lineal en el punto $1 + \Delta x$ para $\Delta x \rightarrow 0$ es:

- a) 0
- b) $2\Delta x$
- c) $\frac{1}{2}\Delta x$
- d) Ninguna de las anteriores.

6.- Sean $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}, g(x) = (\cos x) (\operatorname{sen}(2x))^3$. Entonces para $x = 0$ se puede afirmar:

- a) $f(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $g(x)$
- b) $f(x)$ es un infinitésimo de orden inferior a $g(x)$
- c) $f(x)$ es del mismo orden que $g(x)$ pero no son equivalentes.
- d) $f(x)$ es del mismo orden que $g(x)$ y además son equivalentes.

7.- Sea $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$, $g(x) = (\cos x)(\sin(2x))^2$

- a) La parte principal de $f(x) - g(x)$ es $-\frac{7}{2}x^2$
- b) La parte principal de $f(x) - g(x)$ es $-\frac{7}{2}$
- c) La parte principal de $f(x) - g(x)$ es 2
- d) Ninguna de las anteriores.

8.- Se considera la curva en paramétricas $x = 2 \cos t + \sin(2t)$, $y = 2 \sin t + \cos(2t)$. Calcula la pendiente de la recta tangente en el punto de coordenadas (2,1) (correspondiente al valor de $t = 0$)

- a) 3
- b) 2
- c) 1
- d) 0

9.- Supongamos que f es continua y tiene derivadas parciales continuas. Supongamos también que tiene derivada direccional máxima igual a 50 en $P(1,2)$, que se alcanza en la dirección de P a $Q(3,-4)$. Utilizando esta información calcula $\nabla f(1,2)$

- a) $\nabla f(1,2) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right)$
- b) $\nabla f(1,2) = 50$
- c) $\nabla f(1,2) = \left(\frac{50}{\sqrt{10}}, -\frac{150}{\sqrt{10}} \right)$
- d) Ninguna de las anteriores.

10.- Si la función $f(x)$ es derivable en \mathbb{R} y presenta un mínimo relativo en $x = 2$, siendo $g(x) = 3x^3$, se construye una nueva función $h = f \circ g$ (g compuesta con f) ¿En qué puntos tiene tangente horizontal la función h ?

- a) En $x = 2$ y en $x = 0$
- b) Sólo en $x = 2$
- c) En $x = 2$ y en los valores de x que anulen a $f(x)$
- d) En $x = 0$ y en $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

11.- Sea C la curva de nivel que pasa por $P(1,1)$ de $z = f(x,y) = x^2 + y^2$. Determinar la pendiente en $P(1,1)$ de la tangente a la curva C .

- a) -1 b) 0 c) 1 d) Ninguna de las anteriores

12.- Sea $w = f(u)$ una función derivable, $u = \frac{y}{x}$ entonces la expresión $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + xy$ es

- a) $f' \left(\frac{y}{x} \right)$
- b) xy
- c) No se puede calcular si no se conoce la función f
- d) Ninguna de las anteriores

13.- En un entorno del punto $x = x_0$ el resto de Lagrange del polinomio de Taylor de grado n de la función $y = f(x)$ en x_0 en un punto b es:

- a) $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(c-x_0)^{n+1}$ c un punto intermedio a x_0 y a b
- b) $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-x_0)^{n+1}$ c un punto intermedio a x_0 y a b
- c) $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(c-x_0)^{n+1}$ b un punto intermedio a x_0 y a c
- d) Ninguna de las anteriores.

14.- Dada $y = f(x)$ una función derivable en el punto x_0

- a) La diferencial es el incremento de la variable y cuando pasamos de x_0 a $x_0 + \Delta x$ haciendo $\Delta x \rightarrow 0$
- b) La diferencial en x_0 para un incremento de x , Δx , es un valor próximo a la derivada
- c) La diferencia entre la ordenada de la recta tangente en $x_0 + \Delta x$ y la ordenada en x_0 es la diferencial en x_0 para Δx
- d) Ninguna de las anteriores

15.- Determinar el valor del parámetro m para que el término de primer grado del desarrollo de Taylor de la función $y = f(x)$ en un entorno de $x = 0$ definida implícitamente

por la ecuación $y^3 + mxy + 8 = 0$ sea $\frac{x}{2}$

- a) $m = 4$ b) $m = 3$ c) $m = 2$ d) Ninguna de las anteriores.

16.- El polinomio de Taylor de grado 2 de la función $\frac{\log x}{x}$ en $x = 1$ es:

- a) $1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$ b) $(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$
- c) $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$ d) Ninguna de las anteriores

17.- En el origen la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ es

- a) Diferenciable pero no continua
- b) Continua y diferenciable
- c) Continua pero no diferenciable
- d) Ni continua ni diferenciable

18.- La expresión formal de la derivada de la función inversa es

- a) $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{f^{-1}(f'(x))}$
- b) $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- c) $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f^{-1}(f'(x))}$
- d) $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$

19.- La derivada n-ésima de la función $y = \frac{x+1}{(x+2)^2}$ se anula si:

- a) $x = -n$ b) $x = -n + 1$ c) $x = -n - 1$ d) $x = n - 1$

20.- ¿Cuál de las funciones siguientes no es continua en el origen?

- a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } y = -x^2 \end{cases}$
- b) $g(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- c) $h(x,y) = \operatorname{sen}(xy)e^{-(x+y)}$
- d) $t(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

21.- Supongamos que estamos sobre el punto $P(-1, 5, 8)$ en una colina cuya ecuación es $z = 74 - x^2 - 7xy - 4y^2$. El eje Y señala hacia el norte y el eje X hacia el este.

- a) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el noroeste.
- b) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el suroeste.
- c) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el noreste.
- d) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el sureste.

22.- Elegir la respuesta correcta:

- a) Si f es diferenciable entonces no tienen por qué existir las derivadas parciales pero si existen son continuas.
- b) Si f no es diferenciable entonces alguna de las derivadas parciales primeras no es continua.
- c) Las derivadas parciales segundas pueden existir aunque no existan las derivadas parciales primeras.
- d) Ninguna de las anteriores.

23.- Si $z = f(x,y)$ es una función diferenciable en un punto P entonces el plano tangente en P es:

- a) Tangente a las curvas de nivel
- b) Contiene a las curvas de nivel
- c) Normal al $\vec{\nabla} f$ en P
- d) Ninguna de las anteriores

24.- ¿Cuál de los siguientes pares de infinitésimos en $x = 0$ no son equivalentes:

- a) $e^x - 1$ $\operatorname{sen} x$
- b) $x \operatorname{sen} x$ $\log(1+x^2)$
- c) $x - \operatorname{arcsen} x$
- d) Ninguna de las anteriores

25.- Siendo $P(x)$ el polinomio de Mac Laurin de grado 2 de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ el

valor de $P(2)$ es:

- a) No se puede calcular porque la función $f(x)$ no es continua en el punto 2.
 b) $P(2) = -\frac{4}{3}$ c) $P(2) = \frac{4}{3}$ d) Ninguna de las anteriores

26.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ calcular el valor de la derivada de orden 15 de la función en el punto 0

- a) $-\frac{15!}{2^{16}} + 15!$
 b) $\frac{15!}{2^{16}} - 15!$
 c) $\frac{5}{81 \cdot 15!}$
 d) Ninguna de las anteriores

27.- Dada la curva de nivel de ecuación $x^2 + 2xy + y = 4$ en el punto $P(1,1)$

- a) No se puede calcular un vector tangente a la curva en ese punto.
 b) Un vector tangente en el punto $(1,1)$ a esa curva es el vector $v = \left(1, -\frac{4}{3}\right)$
 c) Un vector normal en el punto $(1,1)$ a esa curva es el vector $v = \left(1, -\frac{4}{3}\right)$
 d) Ninguna de las anteriores.

28.- De $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 verificando

$g(-1, 1) = 1$ y $\vec{\nabla} g(-1, 1) = (3, 4)$. Dada $F(x, y) = \frac{x^2 + y}{e^{g(x, y)}}$ se tiene

- a) $\frac{\partial F}{\partial x}(-1, 1) = -\frac{4}{e}$ $\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 1) = -\frac{7}{e}$
 b) $\frac{\partial F}{\partial x}(-1, 1) = -\frac{8}{e}$ $\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 1) = -\frac{7}{e}$
 c) $\frac{\partial F}{\partial x}(-1, 1) = \frac{4}{e}$ $\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 1) = \frac{7}{e}$
 d) Ninguna de las anteriores

29.- Dada $y = g(x)$, $x = h(t)$ con g y h funciones derivables marcar la afirmación correcta

- a) $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)$
 b) $\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ c) $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx} \frac{d^2x}{dt^2}$ d) Ninguna

30.- El dominio de la función $f(x,y) = |y| \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ es

- a) Todo \mathbb{R}
- b) Todos los puntos del plano salvo el origen de coordenadas.
- c) Todos los puntos del plano salvo la región $\{(x,y)/y>x>0\}$
- d) Ninguna de las anteriores.

31.- La parte principal del infinitésimo $\log(1+x) - x$ para $x = 0$ es

- a) $-\frac{x^2}{2}$
- b) $-1/2$
- c) 0
- d) Ninguna de las anteriores.

32.- Un objeto se encuentra en el punto (3,4) y recorre los puntos de una circunferencia de radio 5 ¿cuál es la variación de su abscisa respecto al tiempo si en ese instante su velocidad angular es 1 rad/seg?

- a) -4
- b) 0
- c) 4
- d) Ninguna de las anteriores

33.- Siendo una función tal que $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy$ con $f'(0) = 0$ se cumple que

- a) $f'(a) = 2 + 3a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- b) $f'(a) = 3a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- c) $f'(a) = 1 + 3a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- d) $f'(a) = f(0) + 3a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

34.- El polinomio de Taylor de segundo grado en el origen para la función $f(x) = \ln(1 + \operatorname{tg} x)$ es:

- a) $3x + \frac{x^2}{2}$
- b) $x + \frac{x^2}{2}$
- c) $2x - \frac{x^2}{2}$
- d) Ninguna de las anteriores

35.- ¿Cuáles de los siguientes pares de infinitésimos son equivalentes e $x = 0$?

- a) $x \operatorname{sen} x$ y $\ln(1+x^2)$
- b) $e^x - 1$ y $\operatorname{sen} x$
- c) $1 - \cos 2x$ y $2x$
- d) Ninguna de las anteriores.

36.- El desarrollo en serie de potencias de x de la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ es:

- a) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- b) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- c) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots; \quad \forall x \in (-1, 1)$
- d) Ninguna de las anteriores.

37.- El polinomio de Taylor de grado 2 de la función $3x^3 + 2x + 5$, en el punto $x = -1$ es:

- a) $11(x+1) - 9(x+1)^2$
- b) $1 + 11(x+1) - 9(x+1)^2$
- c) $11(x-1) - 9(x-1)^2$
- d) Ninguna de las anteriores.

38.- Se consideran los siguientes desarrollos en serie de potencias centrados en $x = 0$

- a) $\sin x = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- b) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- c) $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots, \quad x \in [-1, 1)$

¿ Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a) Los tres desarrollos son incorrectos.
- b) Sólo el desarrollo (b) es correcto.
- c) Los desarrollos (b) y (c) son correctos.
- d) Ninguna de las anteriores.

39.- Sea r el radio de convergencia de una serie de potencias, entonces es cierto que:

- a) El radio de convergencia de la serie derivada es $r + 1$.
- b) El radio de convergencia de la serie derivada no se puede conocer si no conocemos la serie original.
- c) El radio de convergencia de la serie derivada es r y los intervalos de convergencia coinciden.
- d) Ninguna de las anteriores.

40.- La serie dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+2} x^n$

- a) Converge para $x=2$
- b) Converge para $-1 \leq x \leq 1$
- c) Converge para todo $x \in \mathbb{R}$
- d) Ninguna de las anteriores.

41.- La suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n$ es:

- a) $\frac{1}{x-3}$ si $x \in (-1, 1)$
- b) $\frac{1}{3-x}$ si $x \in (-1, 1)$
- c) $\frac{3}{1-x}$ si $x \in (-1, 1)$
- d) Ninguna de las anteriores.

42.- El dominio de la función $z = \arcsen(x+y)$ es:

- a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y+1 \leq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y-1 \geq 0\}$
- b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y+1 \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y-1 \leq 0\}$
- c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y+1 \leq 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y-1 \geq 0\}$
- d) Ninguna de las anteriores.

43.- El límite de la función $f(x,y) = -\frac{4xy}{3x^2+2y^2}$ en el origen, es:

- a) 0
- b) No existe.
- c) $-\frac{4}{5}$
- d) Ninguna de las anteriores.

44.- La derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2 + 2xy$ en el punto $(1,-1)$, según la dirección del vector $u = (-1,3)$ es:

- a) -2
- b) 0
- c) $2\sqrt{2}$
- d) Ninguna de las anteriores.

45.- La dirección de máxima pendiente de la superficie $f(x,y) = \sen(xy)$ en el punto $P\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ es:

- a) $u = \frac{\sqrt{3\pi}}{6}i + \frac{\sqrt{3\pi}}{4}j$
- b) $u = \frac{\sqrt{\pi}}{3}i + \frac{\sqrt{\pi}}{2}j$
- c) $u = 3i + 2j$
- d) Ninguna de las anteriores.

46.- Sea $w = ue^{u^2-v^2}$, donde $u = 2x^2+3y^2$, $v = 3x^2-2y^2$. Entonces la $\frac{\partial w}{\partial x}$ es:

- a) $\frac{\partial w}{\partial x} = e^{u^2-v^2} (1+2u^2-2uv)$
- b) $\frac{\partial w}{\partial x} = e^{u^2-v^2} (8xu^2+4x-12uvx)$
- c) $\frac{\partial w}{\partial x} = e^{u^2-v^2} (8xu^2-4x+6y)$
- d) Ninguna de las anteriores.