

1.18 TRANSFORMADA Z. ( 23 Problemas )

1.- Considerar una señal discreta  $x[n] = a^n U[n]$   $a \in \mathbb{R}^+$ . Calcular su transformada Z y estudiar su ROC

2.- Calcular la transformada Z de  $x[n] = -a^n U[-n-1]$   $a \in \mathbb{R}^+$  y su ROC

3.- Calcular la transformada Z de  $x[n] = -a^{-n} U[-n-1]$   $a \in \mathbb{R}^+$  y su ROC

4.- Calcular la transformada Z de  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n U[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n U[n]$  y su ROC

5.- Consideremos la siguiente señal

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad a > 0$$

Calcular la transformada Z y representar su ROC, polos y ceros.

6.- Dada  $x[n] = b^{|n|}$ , estudiar su transformada Z en los casos  $\begin{cases} 0 < b < 1 \\ b > 1 \end{cases}$

7.- Determinar la transformada Z de las funciones siguientes, dibujando su ROC con polos y ceros e indicando si existe o no la transformada de Fourier de la secuencia

a)  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n U[n]$

b)  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n U[-n]$

c)  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} U[n-1]$

8.- Calcular la transformada Z de  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$  y su ROC

9.- Considerar las posibles ROC asociadas a la función

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$$

10.- Calcular la transformada inversa asociada a:

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} \quad (x[n] \text{ absolutamente sumable})$$

11.- Calcular la transformada inversa asociada a:

$$X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}} \quad (x[n] \text{ absolutamente sumable})$$

1.18 TRANSFORMADA Z. ( 23 Problemas )

12.- Considere una secuencia  $x[n]$  derecha cuya transformada z es:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$$

- Determinar  $x[n]$
- Diagrama de polos y ceros ¿Qué se puede decir sobre la convergencia?

13.- Hallar la función de transferencia con su ROC y la respuesta al impulso del sistema caracterizando por la ecuación  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$

14.- a) Determine la función de transferencia del sistema LTI causal que esta caracterizado por la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

- Usando la transformada Z, determine  $y[n]$  cuando  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n U[n]$

15.- Una secuencia  $x[n]$  es la salida de un sistema LTI cuya entrada es  $s[n]$ . Este sistema viene descrito por la ecuación en diferencias

$$x[n] = s[n] - e^{-8\alpha} s[n-8] \quad 0 < \alpha < 1$$

- Encuentre la función de transferencia  $H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}$  y dibuje sus polos y ceros en el plano z. Indique ROC
- Deseamos recuperar  $s[n]$  a partir de  $x[n]$  con un sistema LTI. Encuentre la función de transferencia  $H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  tal que  $y[n] = s[n]$ . Encuentre todas las posibles ROC de  $H_2(z)$  y mencione para cada una de ellas si el sistema es o no causal y estable.

16.- Considere un sistema LTI con entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$  para el cual se define la ecuación en diferencias

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

El sistema puede o no ser estable y / o causal. Considerando el patrón de polos y ceros dado por el sistema, determine 3 posibles respuestas del sistema a la muestra unitaria. Demuestre que cada una de ellas satisface la ecuación en diferencias.

17.- Un sistema LTI esta descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

- Encuentre la función de transferencia  $H(z) = \frac{y(z)}{x(z)}$  para este sistema. Dibuje el patrón de polos y ceros e indique la ROC
- Encuentre la respuesta a la muestra unitaria de este sistema.
- Debe haber notado que este sistema es inestable. Encuentre una respuesta estable a la muestra unitaria (no causal) que satisfaga la ecuación en diferencias.

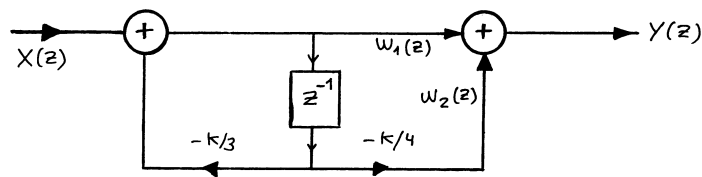
1.18 TRANSFORMADA Z. ( 23 Problemas )

18.- El sistema LTI caracterizado por la ecuación en diferencias

$$y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

El sistema es estable. Determine la respuesta a la muestra unitaria.

19.- Considere la estructura del filtro digital mostrado en la figura



a) Encuentre  $H(z)$  para este filtro causal. Dibuje polos, ceros y ROC

b) ¿Para qué valores de  $k$  es estable el sistema?

c) Determinar  $y[n]$  siendo  $x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \forall n$  en el caso  $k=1$

20.- Se sabe lo siguiente acerca de un sistema LTI de tiempo discreto con entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$

1.- Si  $x[n] = (-2)^n \forall n$  entonces  $y[n] = 0 \forall n$

2.- Si  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  entonces  $y[n] = \delta[n] + a \left(\frac{1}{4}\right)^n U[n]$  con  $a$  constante.

a) Determinar el valor de la constante  $a$ .

b) Determinar  $y[n]$  si  $x[n] = 1 \forall n$

21.- Dada la ecuación en diferencias

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Obtener respuesta natural y forzada de la ecuación, de forma directa y obteniendo la solución de la ecuación en diferencias.

22.- Aplicando transformada Z unilateral, obtener la solución forzada y natural para la ecuación en diferencias:

$$y[n] = x[n] - 3y[n-1] \quad \text{con} \quad y[-1] = -1/3$$

23.- Aplicar transformada Z unilateral a la ecuación:

$$6y[n] + y[n-1] - y[n-2] = 12x[n] + 20x[n-1] + 13x[n-2]. \text{ Indicar } y[n]$$

**PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z**

Secuencia	Transformada	Región de Convergencia
$x[n]$	$X(z)$	$R_x$
$x_1[n]$	$X_1(z)$	$R_1$
$x_2[n]$	$X_2(z)$	$R_2$
$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Al menos la intersección De $R_1$ y $R_2$
$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	$R_x$ excepto por la posible adición o eliminación del origen
$e^{j\Omega} 0^n x[n]$	$X(e^{-j\Omega} 0z)$	$R_x$
$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R_x$
$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Versión escalada de $R_x$ , es decir, $ a  \cdot R_x =$ conjunto de puntos $\{ a z\}$ para $z$ en $R_x$
$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$R_x$ invertida, (es decir, $R_x^{-1} =$ conjunto de puntos $z^{-1}$ donde $z$ está en $R_x$ )
$w[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ para alguna $r$	$X(z^k)$	$R_x^{1/k}$ (es decir, el conjunto de puntos $z^{1/k}$ donde $z$ está en $R_x$ )
$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos la intersección de $R_1$ y $R_2$
$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_x$ excepto por la posible adición o eliminación del origen
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$	$\frac{1}{1-z} X(z)$	Al menos la intersección De $R_x$ $ z  > 1$