

1.17 VARIABLE COMPLEJA. (59 Problemas)

1.- Sea $f(z)$ una función analítica. Demostrar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} |f(z)|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} |f(z)|\right)^2 = |f'(z)|^2$$

2.- Determinar, utilizando la definición, si la siguiente función es derivable en C .
 $f(z) = |z|^2$

3.- Demostrar que toda función analítica satisface la condición:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$$

4.- Encontrar una función $f(z)$ analítica tal que : $\text{Re}(f'(z)) = 3x^2 - 4y - 3y^2$ sabiendo además que $f(1+i) = 0$

5.- Sea $f(z)$ analítica. Se cumple que $\text{Im}[f'(z)] = 6x(2y-1)$ y $f(0) = 3 - 2i$. Calcular $f(1+i)$

6.- Hallar la curva transformada de $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ por la variable $w = z + 1$.

7.- Resolver $\oint_C \bar{z} dz$ desde $z = 0$ a $z = 4+2i$ a lo largo de las curvas:

- a) $z = t^2 + it$
- b) Líneas desde $z = 0$ a $z = 2i$ y desde $z = 2i$ hasta $z = 4+2i$

8.- Resolver $\oint_C \frac{dz}{z-2}$ alrededor de:

- a) Círculo $|z-2| = 4$
- b) Círculo $|z-1| = 5$
- c) Cuadrado de vértices: $2 \pm 2i, -2 \pm 2i$

9.- Resolver $\oint_C \bar{z}^2 dz$ sobre:

- a) $|z| = 1$
- b) $|z-1| = 1$

10.- Resolver $\oint_C \bar{z} dz$ sobre:

- a) $|z-2| = 3$
- b) Cuadrado de vértices $z = 0, 2i, 2, 2+2i$
- c) $|z-3| + |z+3| = 10$

11.- Resolver $\oint_C \frac{\text{sen } \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$ en $|z| = 3$

1.17 VARIABLE COMPLEJA. (59 Problemas)

12.- Resolver $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ en $|z| = 3$

13.- Resolver $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$ para:

a) $|z| = 3$

b) $|z| = 1$

14.- Resolver $\oint_C \frac{\text{sen } 3z}{z + \frac{\pi}{2}} dz$ para $|z| = 5$

15.- Resolver $\oint_C \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz$ para

a) $|z - 1| = 4$

b) $|z - 2| + |z + 2| = 6$

16.- Calcular los residuos asociados a los polos de $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-1)}$

17.- Calcular los residuos asociados a $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2 + 4)}$

18.- Calcular los residuos asociados a $f(z) = e^z \cdot \cos e^{2z}$

19.- Calcular $\oint \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$ alrededor del círculo definido por $|z| = 3$

20.- Resolver $\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{3 - 2\cos \alpha + \text{sen } \alpha}$ aplicando integración compleja.

21.- Resolver $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\alpha}{5 - 4\cos \alpha} d\alpha$ mediante integración de variable compleja.

22.- Resolver $\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(5 - 3\text{sen } \alpha)^2}$ utilizando variable compleja.

23.- Resolver $\int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cdot \cos(\varphi + \text{sen } \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi$ en variable compleja.

24.- Resolver $\int_0^{2\pi} e^{k \cos \varphi} \cdot \cos(k \text{sen } \varphi - n\varphi) d\varphi$

1.17 VARIABLE COMPLEJA. (59 Problemas)

25.- Resolver $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$ utilizando variable compleja.

26.- Calcular utilizando variable compleja: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2}$

27.- Calcular $\int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$ $a, b \in \mathbb{R}^+$

28.- Calcular las siguientes integrales reales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{1 + x^2} dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sen mx}{1 + x^2} dx$$

29.- Sin utilizar el teorema del residuo, calcular $\oint_C \frac{e^z}{z^3 - 2z^2 + z} dz$ siendo $C : |z| = 2$

30.- Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx$ $a > 0$ $b > 0$ utilizando y sin utilizar el teorema del residuo.

31.- Probar que $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx = \pi \ln 2$

32.- Resolver $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$

33.- Resolver $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x + 1)}$

34.- Resolver $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$ utilizando variable compleja.

35.- Calcular el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z^2(z - 3)^2}$ en $z = 0$ y en $z = 3$.

Analizar el tipo de singularidades asociadas.

36.- Desarrollar $f(z) = \frac{1}{(z + 1)(z + 3)}$ en serie de Laurent valida para:

a) $1 < |z| < 3$

b) $|z| < 3$

c) $|z| < 1$

d) $0 < |z + 1| < 2$

1.17 VARIABLE COMPLEJA. (59 Problemas)

37.- Desarrollo de la función $f(z) = \frac{1}{z^2 - z(1+i/2) + i/2}$ en serie de Laurent

38.- Establecer los posibles desarrollos en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{3z-2}{z^2(z-2)}$ en torno a $z = i$.

39.- Calcular el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3}$ en $1 < |z| < 3$

40.- Utilizando el desarrollo en serie, clasificar las singularidades de la función $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$ y calcular el residuo en dichos puntos.

41.- Calcular el valor de: $\int_C \frac{z^3 e^{1/z}}{z+1} dz$ siendo C definido por $|z| = 2$

42.- Calcular $\int_C \frac{dz}{1+z^4}$ donde C es la curva: $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$.

43.- Dada la circunferencia de centro (0,1) y radio 1 . $I_1 = \int_A^B \frac{dz}{z^2+1}$. Siendo I_1 el arco del primer cuadrante e I_2 el del segundo.

a) Demostrar que $I_1 \neq I_2$

b) Calcular I_1 e I_2

44.- Obtener los cinco primeros términos del desarrollo en serie de potencias de z de la función: $f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$, indicando el recinto de convergencia. Estudiar el punto $z = 0$.

45.- a) Calcular el valor de la integral $I_1 = \int_0^{2\pi} e^{-in\alpha} \cdot f(z_0 + e^{i\alpha}) d\alpha$. Siendo n natural y f(z) holomorfa en un dominio simplemente conexo que contenga a la circunferencia C de centro z_0 y radio unidad.

b) Calcular $I_2 = \int_0^\pi (2 \cos \alpha)^{m+k} \cdot (\cos(m-k)\alpha) d\alpha$ siendo m y k naturales con $m > k$.

46.- Desarrollar en serie de Laurent en el entorno $z = i$ la función $f(z) = \frac{5z+2i}{z(z+i)}$

47.- Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n-1}$

a) Hallar su región de convergencia.

b) Sumar dicha serie.

48.- Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2} dx$ con $a > 0$ mediante integración en el campo complejo.

49.- Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$ con $0 < a < 1$.

50.- a) Desarrollar $f(z) = e^{z/z-2}$ en serie de Laurent alrededor de $z = 2$.

b) Determinar la región de convergencia.

c) Clasificar la singularidad.

1.17 VARIABLE COMPLEJA. (59 Problemas)

51.- Sea $f(z)$ una función analítica verificando $\text{Im } f'(z) = 2xy - y + 1$ $\text{Re } f'(i) = \frac{1}{\pi}$

Calcular:

a) $\int \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz$ con $C : |z| = 4$

b) $\int \frac{f(z)}{z^2 - 1} dz$ con $C : |z| = 2$

52.- Sea C el arco del círculo $|z| = 2$ desde $z = 2$ a $z = 2i$ en el primer cuadrante. Sin calcular la integral, acotar:

a) $\int \frac{dz}{z^2 - 1}$

b) $\int Chz dz$

53.- Indicar si la función $f(z) = \text{sen } z$ es acotada en todo su dominio de definición.

54.- Sea C el contorno del triángulo con vértices en los puntos 0 , $3i$ y -4 con orientación positiva:

a) Acotar el módulo de la integral $\oint_C (e^z - \bar{z}) dz$

b) Obtener su valor.

55.- Calcular $\int_0^\pi e^{a \cos \varphi} \cdot \cos(a \text{ sen } \varphi) \cdot d\varphi$

56.- Calcular $\int_0^\pi \cos(\text{sen } n\varphi) \cos^3 \varphi \cdot e^{\cos n\varphi} \cdot d\varphi$ con $n > 3$

57.- Sea C la frontera del cuadrado de vértices en los puntos $z_1=0$ $z_2=1$ $z_3 = 1+i$ $z_4= i$ y la orientación del contorno antihoraria. Calcular $\int_C \pi \cdot e^{\pi z} \cdot dz$

58.- Dada la función $f(z) = \frac{z^2 - 1}{1 + \cos \pi z}$

a) Clasificar las singularidades de $f(z)$

b) Calcular $\int_C \frac{z^2 - 1}{1 + \cos \pi z} dz$ siendo $C : |z| = 2$

59.- Dada la función $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$

i) Desarrollar en serie de Laurent de potencias de $(z-1)$, utilizando las fórmulas generales en los dominios $1 < |z-1| < 2$ y $|z-1| > 3$

ii) Clasificar las singularidades de la función $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ mediante

desarrollos en serie y obtener el residuo en estos puntos.

iii) Calcular el residuo en el infinito utilizando la definición y desarrollo en serie.