1.16 APLICACIONES FISICAS Y MATEMATICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.
(33 problemas)

1.- Supongamos que se ponen x_0 bacterias en una solución nutritiva en el tiempo t=0 y que x es la población de una colonia en el momento posterior t. Si los alimentos y el espacio vital son ilimitados y si, como consecuencia de ello, la población en cualquier momento, aumenta de forma proporcional a la población ya existente, encontrar x en función del tiempo t.

2.- La cantidad de materia radiactiva que se desintegra por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad de materia que queda. Según ciertas experiencias, la desintegración anual de radio es del orden de 0.44 mgs por gramo. Calcular cuántos años deben transcurrir para que se desintegre la mitad de toda la reserva de radio.

3.- Supongamos que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el ambiente que le rodea (ley de enfriamiento de Newton).
Un cuerpo se calienta a 110°C y se expone al aire libre a una temperatura de 10°C. Al cabo de una hora, su temperatura es de 60°C. Determinar el tiempo adicional que debe transcurrir para que se enfríe a 30°C.

4.- Un gran depósito contiene 100 litros de salmuera en la que están disueltos 200 kg de sal. A partir del tiempo t=0, se introduce agua pura a razón de 3 litros por minuto y la mezcla (que se mantiene uniforme, revolviéndola), sale del depósito a razón de 2 litros por minuto. Calcular el tiempo que necesitará para reducir la cantidad de sal que hay en el deposito a 100 kg.

5.- Según la ley de Torricelli, el agua de un depósito abierto se escapará por un pequeño agujero en el fondo con la velocidad que adquiera al caer libremente desde el nivel del agua hasta el orificio (en la práctica se introduce un coeficiente corrector cuyo valor es de 0,6).
Un cuenco hemisférico de radio R esta inicialmente lleno de agua y se perfora un pequeño orificio circular de radio r en el fondo, en el tiempo t=0. Calcular el tiempo que deberá transcurrir hasta que se vacíe el cuenco.

6.- Está nevando con regularidad. A las doce sale una máquina quitanieves que recorre en la primera hora 2 km. y en la segunda hora 1 km. ¿A qué hora empezó a nevar?
Se admite que la cantidad de nieve quitada por la máquina en la unidad de tiempo es uniforme, de modo que su velocidad de avance resulta inversamente proporcional a la altura de nieve encontrada en el camino.

7.- Un torpedo se desplaza a una velocidad de 60 km/h, en el momento en que se agota el combustible. Si el agua se opone a su movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad y si en 1 km de recorrido reduce la velocidad a 30 km/h. Calcular la distancia a la que se detendrá.

8.- Un deposito contiene 500 litros de salmuera en la que están disueltos 25 kg de sal. Comenzando en tiempo t=0, entra agua en el depósito a razón de 2 litros por minuto y la mezcla sale al mismo ritmo a través de otro depósito que inicialmente contenía 500 litros de agua pura ¿Cuándo contendrá el segundo depósito la mayor cantidad de sal?

1.16 APLICACIONES FISICAS Y MATEMATICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES. (33 problemas)

9.- Se coloca una bola en el punto más elevado de una circunferencia, situada en un plano vertical. Mediante un alambre recto, se une dicho punto con otro distinto de la circunferencia. Demostrar que, si la bola desciende sin rozamiento por el alambre, siempre tarda el mismo tiempo en alcanzar el punto inferior, sea cual sea la posición de éste.

10.- Un estudiante va a realizar un exámen de una materia que contiene 57 páginas de estudio. La velocidad a la que estudia es inversamente proporcional al producto del tiempo que lleva estudiando por la cantidad que le resta de estudiar. El primer día estudia 4 páginas y entre el segundo y el tercero estudia 7 páginas. ¿Qué día debe empezar a estudiar si quiere saber lo pedido?

11.- El presidente y el ministro piden café y reciben tazas a igual temperatura y al mismo tiempo. El presidente agrega inmediatamente una pequeña cantidad de leche fría, pero no se toma el café hasta 10 minutos después. El ministro espera 10 minutos y luego, añade la misma cantidad de leche fría y comienza a tomarse el café. Determinar quién se tomará el café más caliente.

12.- Dado el circuito de serie formado por una autoinducción (L), resistencia R y una fuente E_0, resolver:

a) Cuando $E(t)=E_0$ y la corriente inicial es i_0.
b) Cuando L=3H. R=15Ω E(t) es una onda sinusoidal de amplitud 110 V ciclo 60, e i=0 para t=0.

13.- Un circuito eléctrico contiene una resistencia R (Ω) y un condensador de capacidad C (faradios) en serie y una f.e.m E (voltios). Establecer la ecuación diferencial.
Si R=10 Ω C=10^{-3} faradios y E(t)= 100 sen 120 πt voltios,

a) Hallar q , suponiendo que q=0 para t=0.
b) Emplear i=dq/dt para hallar i, suponiendo i=5 A. Cuando t=0.

14.- Un deposito cilíndrico de volumen V_0 está lleno de aire atmosférico, que se comprime de un modo adiabático hasta que el volumen se hace igual a V_1. Calcular el trabajo invertido durante la compresión.

15.- La fuerza que ejerce la gravedad sobre un cuerpo de masa m en la superficie de la tierra es mg. No obstante, en el espacio la ley de la gravedad de Newton establece que esta fuerza varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia al centro de la tierra. Para que un proyectil disparado hacia arriba, desde la superficie de la tierra, se mantenga en movimiento indefinidamente, demostrar que su velocidad inicial debe ser, por lo menos, de $\sqrt{2gR}$, donde R es el radio de la tierra. Esta velocidad de escape es aproximadamente de 40000 km/h.

16.- Un resorte de peso despreciable está suspendido verticalmente. En su extremo libre se ha sujetado una masa de m kilogramos. Si la masa se mueve con velocidad v_0 m/seg cuando el resorte esta sin alargar, hallar la velocidad v como una función del alargamiento x.

1.16 APLICACIONES FISICAS Y MATEMATICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES. (33 problemas)

17.- La sala de disección de un médico se encuentra a una temperatura constante de 5ºC. En el transcurso de una autopsia el médico es asesinado.
A las 10 a.m. se encuentra el cadáver a una temperatura de 23º C. Al mediodía la temperatura es de 18,5º C. Si en vida el médico tenía una temperatura de 37º C. ¿ A qué hora fue asesinado?

18.- Hallar la ecuación diferencial de los círculos de radio 1 centrados en la recta y=2x.

19.- Hallar la ecuación diferencial asociada a las primitivas:
a) $y(x) = Ax^2 + Bx + C$
b) $x^2y^3 + x^3y^5 = C$
c) $y = A\cos ax + B\,\mathrm{sen}\,ax$ con a constante.

20.- Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de rectas y=k . x

21.- Hallar la ecuación de la familia de las curvas que son ortogonales a la familia $y=ax^2$

22.- Hallar la ecuación de la familia de las curvas que son ortogonales a la familia $x^2 +y^2 =2ax$

23.- Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de cardioides $\rho = C\,(1+\mathrm{sen}\alpha)$

24.- Demostrar que la familia de cónicas homofocales $x^2/c + y^2/c - \lambda = 1$ donde c es una constante arbitraria, es autoortogonal

25.- Hallar las trayectorias oblicuas de ángulo $\pi/6$ asociadas a la familia de curvas y = Cx.

26.- Hallar las trayectorias ortogonales de las hipérbolas xy = C

27.- Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio fijo r cuyos centros estén en el eje x.

28.- Hallar la curva para la que:
a) La suma de los segmentos interceptados por la recta tangente en los ejes coordenados es igual a K.
b) El producto de los segmentos interceptados por la recta tangente en los ejes coordendos es igual a K.

29.- La ecuación diferencial $y = xy' + f(y')$ recibe el nombre de ecuación de Clairaut.
a) Demostrar que la solución de dicha ecuación es de la forma $y = kx + f(k)$ para cualquier constante k.
b) Teniendo en cuenta el apartado a) obtener la solución general de $y = xy' + y'^2$ dibujar algún miembro de la familia de curvas solución.
c) Obtener la envolvente del haz de curvas del apartado b) y comprobar que dicha envolvente es una solución particular de la ecuación diferencial.

1.16 APLICACIONES FISICAS Y MATEMATICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES. (33 problemas)

30.- Por un punto cualquiera (x , y) de una curva que pasa por el origen se trazan dos rectas paralelas a los ejes coordenados. Hallar la curva de modo que divida el rectángulo formado por las dos rectas y los ejes coordenados en dos superficies, una de área triple que la otra.

31.- Hallar una curva tal que en cualquier punto de ella el ángulo entre el radio vector y la tangente sea igual a un tercio del ángulo de inclinación de la tangente.

32.- Determinar las trayectorias a 45° de la familia de circunferencias concéntricas $x^2 + y^2 = C$

33.- Dadas las ecuaciones diferenciales:

$$xy'' = y' \qquad\qquad (1+y)y'' + (y')^2 = 0$$

a) Resolver.
b) Determinar las condiciones que cumplen las constantes de las soluciones de ambas para definir curvas tales que sean tangentes en el punto (1,0)
c) Determinar la solución que cumpliendo el apartado anterior sea tangente al eje OX