

1.12 TRANSFORMADA DE FOURIER. (47 Problemas)

1.- Sea $f(x)$ una función que admite transformada de Fourier, h un número real. Encontrar la transformada de la función desplazamiento $f_h(x) = f(x - h)$ en función de $F[f]$.

2.- Sea $f(x)$ una función con derivadas continuas absolutamente integrables hasta el orden m inclusive, todas ellas, al igual que $f(x)$ tienden a cero cuando $|x|$ tiende a infinito. Encontrar $F[f']$ y en general $F[f^{(k)}(x)]$ ($k = 1, 2, \dots, m$) en función de $F[f]$.

3.- Sabiendo que

$$\Im \left[\frac{t}{(1+t^2)^2} \right] = \frac{-i\pi}{2} \omega e^{-|\omega|}$$

Calcular la transformada inversa de $F(\omega) = \frac{\omega}{(1+\omega^2)^2}$

4.- a) Encontrar la función $G(\omega)$ transformada de Fourier de la función $g(x) = f(x) \cos ax$ dependiendo de la función $F(\omega)$ transformada de Fourier de $f(x)$.

b) Demostrar las propiedades de la transformación de Fourier de las que se pudo hacer uso para obtener el resultado anterior.

c) ¿Cuál es la parte imaginaria de $G(\omega)$ si $f(x)$ es una función par? ¿Y si es impar? Demostrar las respuestas.

5.- a) Calcular la transformada de Fourier inversa de $F(\omega) = 1/(\omega^2 - 5i\omega - 6)$

b) Calcular la transformada de Fourier inversa de $G(\omega) = \frac{e^{-3i\omega}}{\omega^2 - 5i\omega - 6}$

c) Demostrar la propiedad de la transformada de Fourier que pudo aplicarse en el apartado anterior.

d) Encontrar una solución $y(t)$ de la ecuación diferencial $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \delta(t - 3)$. Calcular $y'(t)$

6.- Calcular el producto de convolución de f y g siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

7.- a) Mediante la definición de transformada de Fourier, comprobar que si

$$f(x) = \begin{cases} -e^{ax} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad \text{Re}(a) > 0 \quad \text{entonces } \Im[f(x)] = F(\omega) = \frac{1}{i\omega - a}$$

b) Encontrar la función $y(x)$ tal que $y'' - 2y = f(x)$, siendo $f(x) = \begin{cases} -e^x & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

1.12 TRANSFORMADA DE FOURIER. (47 Problemas)

8.- a) A partir de la expresión compleja de integral de Fourier deducir la expresión

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen } \omega x \left(\int_0^{\infty} f(t) \text{sen } \omega t \, dt \right) d\omega$$

para una función $f(x)$ impar.

b) Aplicar a la función impar $f(t) = \begin{cases} e^t & t < a \\ 0 & t \geq a \end{cases}$

9.- a) Encontrar la transformada inversa de $F(\omega) = \frac{1}{(i\omega + 1)^3}$

b) Calcular el límite

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \frac{e^{i\omega x}}{(i\omega + 1)^3} d\omega$$

10.- a) Demostrar que si $f(x)$ es una función absolutamente integrable, entonces su transformada de Fourier es acotada.

b) Demostrar que si $f(x)$ es una función absolutamente integrable con derivadas hasta el orden k también absolutamente integrables, verificando que todas ellas tienden a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$, entonces existe $C > 0$, tal que

$$|F[f]| \leq \frac{C}{|\omega|^k}$$

Demostrar cualquier propiedad de la transformada de Fourier de la que se haga uso.

c) Encontrar una función de la familia $\frac{M}{|\omega|^2}$ que acote a la transformada de $f(x) = e^{a|x|}$ ($a < 0$)

11.- a) Encontrar la función $(f * g)(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-3x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Encontrar la función $h(x)$ transformada inversa de $H(\omega) = \frac{\text{sen } \omega}{\omega(i\omega + 3)}$

c) Hallar la integral de Fourier de $h(x)$, indicando en qué puntos coincide con $h(x)$ y en cuáles no. ¿Cuánto vale en estos últimos?

12.- Sea $f(t)$ una función periódica de periodo T definida en todo el eje real y supongamos que $f(t)$ se puede representar por una serie de Fourier en la forma ya conocida

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

¿Cuál es la transformada de Fourier de $f(t)$?

1.12 TRANSFORMADA DE FOURIER. (47 Problemas)

13.- Obtener la transformada inversa de la función

$$F(\omega) = \frac{\text{sen } 3\omega}{\omega(2 + i\omega)}$$

14.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 2 - 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1, x < -1 \end{cases}$. Se pide:

- Hallar la transformada de Fourier de $f(x)$, utilizando la definición.
- Obtener el espectro de amplitud de $f(x)$, y representarlo gráficamente, razonando la forma de la curva e indicando el valor de la amplitud para la frecuencia $\omega=0$, así como los valores de la frecuencia ω para los cuales la amplitud se anula.
- Determinar la representación integral de $f(x)$ en la forma más simplificada que sea posible, indicando su campo de validez, y basándose en el resultado obtenido calcular el valor de las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} \cdot \cos \frac{t}{2} \cdot dt \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} \cdot \cos t \cdot dt$$

15.- Demostrar que si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces

- $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$
- $\mathcal{F}[f(-t - a)] = e^{ia\omega} F(-\omega) \quad a > 0$

16.- Dada la función, se pide:

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & t < -2 \\ \frac{\pi}{4} t & -2 \leq t \leq 2 \\ \frac{\pi}{2} & t > 2 \end{cases}$$

- Definirla mediante una ecuación única utilizando la función escalón unitario
- Obtener su transformada de Fourier.

17.- a) Obtener la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{siendo } a > 0$$

b) Obtener $F^{-1}\left[\frac{1 + \omega i}{6 - \omega^2 + 5\omega i}\right]$

c) Obtener la transformada de Fourier de $f(t) = \frac{5}{4 + it}$

1.12 TRANSFORMADA DE FOURIER. (47 Problemas)

18.- a) Obtener el producto de convolución de la función $f(x)$ consigo misma.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

b) Obtener la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

c) Representar mediante la integral de Fourier la función $g(x)$, justificando la validez y la convergencia de dicha representación.

19.- Resolver la ecuación diferencial $x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 7\delta(t)$. Comprobar el resultado obtenido mediante derivación

20.- a) Obtener la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{si } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$$

21.- a) Aplicando la definición de transformada inversa de Fourier, demostrar la siguiente propiedad:

$$F^{-1} [e^{i\omega h} F(\omega)] = f(t+h) \text{ para todo } h \in \mathbb{R}, \text{ siendo } F(\omega) = F[f(t)].$$

b) Calcular la transformada de Fourier de la función delta de Dirac: $F[\delta(t-t_0)]$

c) Resolver la ecuación diferencial $y'' + 6y' + 5y = \delta(t-3)$ y comprobar el resultado mediante derivación.

22.- Obtener la transformada de Fourier de la función $f(t) = 6$ con $t \in (3,7)$ y $f(t) = 0$ con $t \notin (3,7)$

23.- Sea

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq k \\ 0 & t > k \end{cases}$$

Representar esta función en $[0, \infty)$ mediante una integral de Fourier que sólo contenga cosenos y determinar la convergencia de esta integral hacia $f(t)$.

24.- Sea $f(t) = e^{-kt}$ con $k > 0$ y $t \geq 0$. Se pide:

- ¿Admitirá $f(t)$ una representación mediante integral de Fourier? Razonar la respuesta aplicando las condiciones suficientes de existencia de dicha integral.
- Representar $f(t)$ en $[0, \infty)$ mediante una integral de Fourier que sólo contenga cosenos y determinar la convergencia de esta integral hacia $f(t)$.
- La misma pregunta del apartado anterior mediante una integral de Fourier que sólo contenga senos.

1.12 TRANSFORMADA DE FOURIER. (47 Problemas)

25.- Se considera la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

- Obtener la seno transformación de Fourier de esta función.
- Escribir la representación de $f(t)$ mediante la integral de Fourier.
- Razonar la existencia de dicha representación y su convergencia hacia $f(t)$.

26.- Representar la función $f(t)$ mediante la integral de Fourier. Justificar la validez de esta representación, y razonar la convergencia de dicha integral hacia $f(t)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > 5 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -5 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

27.- Demostrar la propiedad de simetría de la transformación de Fourier.

28.- a) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) f(t) dt \quad a > 0$

b) Calcular $e^{-t} \delta'(t)$

29.- Demostrar la propiedad: $\mathfrak{F} [\delta(t) * f(t)] = \mathfrak{F} [f(t)]$

30.- Obtener la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-at} \cdot \text{sen } \lambda t \cdot U(t)$

31.- Encontrar una integral particular de la función $y'' + ay' + by = f(x)$ donde $f(x) = 1$ si $x^2 < 1$ y $f(x) = 0$ si $x^2 > 1$

32.- Encontrar la función $\phi(x)$ que verifica $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-iwx} dx = 2\pi e^{-|w|}$

33.- Encontrar la transformada de Fourier de

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{2 - \omega^2 + 4i\omega} (\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)) \quad \text{sabiendo que } \mathfrak{F}[1] = 2\pi \delta(\omega)$$

34.- a) A partir de $\mathfrak{F}[1] = 2\pi \delta(\omega)$ obtener $\mathfrak{F}[t^n] = 2\pi i^n \delta^n(\omega)$.

b) Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial haciendo uso de transformadas de Fourier.

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t^2$$

35.- a) Sabemos que si $a > 0$ $\mathfrak{F}[e^{-at} U(t)] = \frac{1}{i\omega + a}$, $\mathfrak{F}[e^{at} U(-t)] = \frac{-1}{i\omega - a}$ Utilizando descomposición en fracciones simples, encontrar la transformada inversa de

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + i\omega + 2}$$

b) Utilizando la propiedad de convolución, encontrar la solución $y(t)$ de la ecuación $-y'' + y' + 2y = e^{-2t} U(t)$

1.12 TRANSFORMADA DE FOURIER. (47 Problemas)

36.- Sabiendo que $F(\omega) \rightarrow 0$ cuando $|\omega| \rightarrow \infty$, demostrar la siguiente propiedad de la transformada inversa de Fourier:

$$\mathfrak{S}^{-1} [F'(\omega)] = -it \mathfrak{S}^{-1} [F(\omega)]$$

37.- a) Obtener la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \frac{\text{sen } \omega_0 t}{\pi t} \quad (\omega_0 > 0)$$

b) Obtener la convolución de las funciones $g(t) = \frac{\text{sen } at}{\pi t}$ y

$$h(t) = \frac{\text{sen } bt}{\pi t} \quad \text{con } a > 0, b > 0$$

38.- a) Sabiendo que $\mathfrak{S} [f(t)] = F(\omega)$ demostrar que $\mathfrak{S} [f(-t)] = F(-\omega)$

b) Sabiendo $\mathfrak{S} [f(t)] = F(\omega)$ calcular $\mathfrak{S} [g(t)]$ y $\mathfrak{S} [h(t)]$ siendo

$$g(t) = f(1-t) + f(-1-t) \quad \text{y} \quad h(t) = \frac{d^2}{dt^2} f(t-1)$$

39.- Sea $f(x)$ la función π -periódica que se genera al extender de forma impar la función $g(x) = x^2 - x + 1$ para $[0, \pi/2]$ se pide:

a) Encontrar su desarrollo en serie de Fourier.

b) Encontrar su transformada de Fourier.

40.- Dibujar los espectros de amplitud y fase de $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$

41.- Dibujar los espectros de amplitud y fase de $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

42.- Transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b} & t > 0 \end{cases}$$

(Con a y b constantes reales positivas y distintas)

43.- Hallar la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} a & |x| < a \\ 2a - x & a < x < 2a \\ 2a + x & -2a < x < -a \\ 0 & x > 2a \\ 0 & x < -2a \end{cases}$$

1.12 TRANSFORMADA DE FOURIER. (47 Problemas)

44.- a) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

b) Representar $f(x)$ y su transformada de Fourier para $a = 3$

45.- a) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

b) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^3} \cos \frac{x}{2} dx$

46.- Sin integrar, utilizando propiedades:

a) Encontrar $\mathfrak{F}[t]$ sabiendo que $\mathfrak{F}[1] = 2\pi \delta(\omega)$

b) Encontrar la transformada inversa de $F(\omega) \delta'(\omega)$ para $F(\omega) = \frac{1}{i\omega + 3}$

47.- Demostrar la propiedad de simetría de la transformada de Fourier:

$$\mathfrak{F}[F(x)] = 2\pi f(-\omega) \quad \text{donde} \quad F(\omega) = \mathfrak{F}[f(x)]$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER

	$f(x)$	$f(w) = \mathfrak{F}[f(x)]$
1	$e^{-a^2 x^2}$	$\frac{\sqrt{p}}{a} e^{-\frac{w^2}{4a^2}}$
2	$e^{-a x }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + w^2}$
3	$\begin{cases} 1 & x < a \\ 0 & x > a \end{cases}, \quad a > 0$	$\frac{2 \operatorname{sen} a w}{w}$
4	$\frac{1}{x^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} a < 0$	$\frac{-p}{a} e^{a w }$
5	$\frac{x}{(x^2 + a^2)^2}, \quad \operatorname{Re} a < 0$	$\frac{iwp}{2a} e^{a w }$
6	$x e^{-a x }, \quad a > 0$	$-\frac{4}{(a^2 + w^2)^2} i a w$
7	$\begin{cases} \cos ax, & x < \frac{p}{2a} \\ 0 & x > \frac{p}{2a} \end{cases}$	$\frac{2a}{a^2 - w^2} \cos \frac{pw}{2a}$
8	$\begin{cases} 1 - x , & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$	$4 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{w}{2}}{w^2}$
9	$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^k e^{ax}, & x > 0 \end{cases} \quad \operatorname{Re} a < 0$ $k = 1, 2, \dots$	$\frac{k!}{(iw - a)^{k+1}}$
10	$\begin{cases} -x^k e^{ax}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad \operatorname{Re} a > 0$ $k = 1, 2, \dots$	$\frac{k!}{(iw - a)^{k+1}}$
11	$d(t - c)$	e^{-icw}
12	$d^{(n)}(t - c)$	$(iw)^n e^{-icw}$
13	1	$2p d(w)$
14	t^n	$2p i^n d^{(n)}(w)$
15	e^{iat}	$2pd(w - a)$
16	$t^n e^{iat}$	$2p i^n d^{(n)}(w - a)$
17	$U(t - c)$	$\frac{e^{-icw}}{iw} + pd(w)$

18	$t^n U(t)$	$\frac{n!}{(i w)^{n+1}} + p i^n d^{(n)}(w)$
19	$\frac{1}{(t-c)^n}$	$\frac{(-i w)^{n-1} e^{-i c w}}{(n-1)!} p i [1 - 2U(w)]$
20	$e^{i a t} t^n U(t)$	$\frac{n!}{[i(w-a)]^{n+1}} + p i^n d^{(n)}(w-a)$
21	$\frac{e^{i a t}}{t-c}$	$e^{-i c(w-a)} p i [1 - 2U(w-a)]$

www.problemasresueltos.com