1.10 INTEGRACION VECTORIAL: GREEN, GAUSS, STOKES. (33 Problemas)

1.- Dado el campo vectorial $F = x^3y\ i + \exp y\ j + z\,\mathrm{tg}\,\frac{xyz}{4}\ k$, calcular $\iint_G (\mathrm{rot}\vec{F}).\vec{n}\,dS$ donde G es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ superior al plano $z = 1$ y $\vec{n}$ es la normal unitaria superior.

2.- Sea V el sólido de R^3 definido por

$$V = \left\{(x, y, z) \in R^3 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\right\}$$

y sea F el campo

$$\vec{F} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

se pide:

a) Calcular el flujo del campo F a través de la superficie cerrada frontera de V.
b) Calcular el flujo del campo F a través de la superficie abierta obtenida al quitar a la superficie frontera de V la tapa inferior definida por $R = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

3.- Sea H el sólido del espacio R^3 acotado por el paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ y por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. Calcular

a) El volumen de H.
b) El flujo del campo vectorial $F = y\ i + 3y\ j - z\ k$ a través de ∂H.

4.- Sea G la superficie (acotada) del primer octante formada por la porción del cilindro $xy = 16$ que resulta de acotar este por los planos $z = 4y$, $x = 8$ y $x = y$. Calcular el flujo del campo vectorial $F = x^2\ i + y\ j + x^2 z\ k$ a través de G.

5.- Sea S la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que se obtiene al cortar este por los planos $x = 0$ y $x + y = 1$ y que esta situada en $z > 0$. (Todos los puntos de S son puntos del cilindro). Se pide:

a) Parametrizar positivamente la curva ∂S
b) Calcular esa misma integral utilizando el teorema de Stokes.
c) Calcular la integral $\int_{\partial S} \vec{F}.d\vec{r}$ siendo $F = yz\ j + x\,(1+y)\ k$.

6.- Sea S la porción de la superficie $z = 3 - x^3$ comprendida entre $z = 0$, $z = 5$, $y = 0$ e $y=1$. Se pide:

a) Plantear la integral que da el área superficial de S.
b) Calcular la masa de S si su densidad superficial viene dada por $\delta(x, y, z) = |3 - z|$.
c) Calcular el flujo de $F = y\ i + z\ k$ a través de S.
d) Comprobar el resultado anterior haciendo uso del teorema de Gauss.

7.- Calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por las superficies $x^2 + y^2 = a^2$ y $z = x + y + b$ siendo $0 < b < a$.

8.- Haciendo uso de coordenadas cilíndricas, calcular el volumen del sólido H del primer octante limitado por las superficies $y = \sqrt{3}\,x$, $z = 0$, $z = b$, y $x^2 + y^2 = 2y$.
Calcular el flujo del campo vectorial $F\,(x,y,z) = 3y\ i + 5x\ j - z\ k$ a través (hacia dentro) de todas las caras del sólido H.

1.10 INTEGRACION VECTORIAL: GREEN, GAUSS, STOKES. (33 Problemas)

9.- Calcular la integral de línea $I = \int_C \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy$ donde C es cualquier curva en el semiplano $y > 0$ que va desde el punto (-1, 1/2) al punto (1,1)

10.- Sea G la superficie (acotada) del primer octante formada por la porción del plano $z = 4y$ que resulta de acotar este por el cilindro $xy = 16$ y los planos $x = 8$ y $x = y$.
Se pide:

a) Calcular el área superficial de G.
b) Calcular la integral de línea del campo vectorial $F = xy\, i + z^2\, j + xyz\, k$ a lo largo de ∂G.

11.- a) Sea S la parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ situada entre los planos $y = \pm\frac{a}{2}, x = \pm\frac{a}{2}$. Hallar el área superficial de S.

b) Si la densidad superficial de un material es $\delta(x,y,z) = y^2 |z|$, calcular la masa de una lámina que tuviera la forma de S.
c) Sea G la parte S correspondiente a $z > 0$. Sea $F(x,y,z) = 2xy\, i - y^2\, j + 3z\, k$. Calcular la integral de línea de F a lo largo de la frontera de G.
d) Sea H el sólido acotado por el cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ y los planos $y = \pm\frac{a}{2}, x = \pm\frac{a}{2}$
Encontrar el volumen de H.
e) Hallar el flujo de $F(x,y,z) = 2xy\, i - y^2\, j + 3z\, k$ hacia fuera de la superficie frontera de H.

12.- Sea S la porción de superficie del cono $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ que queda en $z > 0$ por encima de $z = x$ y de $z = -x$ y entre $y = 1$ e $y = 4$.

a) Encontrar la masa de S si la densidad superficial viene dada por $\delta(x,y,z) = z$.
b) Dado $F(x,y,z) = y\, i - z\, j - yz\, k$, encontrar el trabajo realizado por F a lo largo de la curva ∂S, recorrida en el sentido que induce la normal hacia arriba de S.
c) Sean $G(x,y,z) = xy\, i + 3y\, j - yz\, k$ y H el sólido acotado superiormente por S e inferiormente por $z = 0$. Encontrar el flujo de G hacia fuera de H.

13.- Calcular $\iint_S xz^2 dy\, dz + (x^2 y - z^3) dz\, dx + (2xy + y^2 z) dx\, dy$ siendo S la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ situada en $z > 0$.

14.- Hallar el flujo de $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sobre la cara externa de la porción de superficie $x^2 + y^2 = z$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

15.- Comprobar que se verifica el teorema de Green cuando C es el contorno de la región anular R, situada entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, y el campo vectorial es $F = (2x - y^3)\, i - xy\, j$.

1.10 INTEGRACION VECTORIAL: GREEN, GAUSS, STOKES. (33 Problemas)

16.- Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial F = (y-x) i + (x-z) j + (x-y) k siendo C la frontera del plano x + 2y + z = 2 en el primer octante, orientada en el sentido positivo matemático.

17.- Dado el vector $\vec{V} = (x + yz)\vec{i} + (y + z - xz)\vec{j} + (3 - y)\vec{k}$

1. Flujo a través de la cara externa de la superficie hemisférica: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z > 0$.
2. Flujo del rotacional de $\vec{V}$ a través de la superficie.
3. Circulación de $\vec{V}$ a lo largo del ecuador C : $x^2 + y^2 = 1$ $z = 0$.

18.-a) Utilizar el teorema de Stokes para calcular la integral $\int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ donde C es la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con el plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ siendo $a > 0$, $b > 0$. Representar la curva C, indicando cuál es la orientación de C para que la integral sea positiva.

b) Tomando C con esa orientación, calcular la integral directamente como una integral línea.

19.- a) Utilizar el teorema de la divergencia de Gauss para evaluar el flujo de F (x,y,z) = yz j hacia fuera de la unión de la porción de $z = x^2 + y^2$ para $0 \le z \le 9$ y del disco $x^2 + y^2 \le 9$ en $z = 9$.

b) Comprobar el resultado evaluando directamente la integral de superficie.

20.- Aplicando la fórmula de Green – Riemann, calcular la integral curvilínea $\int_C (x^2 - y^2)dx - (x^2 + y^2)dy$ siendo C el triángulo de vértices (0,0), (1,0) y (0,1) recorrido en sentido positivo.

21.- Calcular $\oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$. Siendo C la intersección del plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ con los planos coordenados.

a) Directamente.
b) Por Stokes.

22.- Calcular el área de la región limitada por $y = x$, $y = 0$, $y = x^2 - x$ de las formas siguientes:

a) Mediante integrales dobles.
b) Mediante integrales de línea.

23.- Area encerrada por el astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ utilizando integrales de línea.

24.- Utilizar el teorema de Gauss para evaluar $\iint_S \vec{F}.\vec{n}.ds$ donde $\vec{F} = xy\vec{i} - z^2\vec{k}$ y S es la superficie formada por $0 \le x \le 1$ $0 \le y \le 1$ $0 \le z \le 1$ y $\vec{n}$ es la normal hacia fuera de S.

1.10 INTEGRACION VECTORIAL: GREEN, GAUSS, STOKES. (33 Problemas)

25.- Calcular $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ siendo C la curva intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ con el plano $x + y = 1$.

26.- Comprobar el teorema de Gauss para el campo $\vec{F} = 3xz\vec{i} + xy\vec{j} - 2z\vec{k}$ y el cilindro $y^2 + z^2 \leq 1$ con $0 \leq x \leq 3$.

27.- Calcular el flujo saliente del campo $\vec{F} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + x^2z\vec{k}$ a través de la superficie cerrada, definida en coordenadas esféricas por las siguientes ecuaciones:

a) Tapa superior $\rho = 2$ con $\begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

b) Tapa inferior $\phi = \dfrac{\pi}{4}$ con $\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

28.- Calcular $\int_C \dfrac{y}{x^2 + y^2}dx - \dfrac{x}{x^2 + y^2}dy$ siendo C la elipse de ecuaciones paramétricas $x = 4\cos t$ $y = 3\,\text{sen}\,t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

29.- Sea C el arco de una curva dado por $xy = 3$ en $z = 0$, con $x \in [1,3]$. Sea S la pantalla vertical apoyada en C y que queda bajo el plano $x + 2y - z = 0$

a) Calcular el área superficial mediante una integral sobre una curva. (plantear)
b) Calcular el área superficial mediante integrales dobles. (plantear)
c) Dado el campo $\vec{F} = \vec{i} + x^2\vec{j} + y\vec{k}$, y C el arco de la curva que rodea a la superficie S. Calcular el trabajo realizado por el campo sobre dicho contorno.
d) Volumen del sólido limitado por S, $x + 2y - z = 0$, $x = 1$ $y = 1$ y $z = 0$.
e) Evaluar el trabajo utilizando Stokes.
f) Flujo de $\vec{F}$ sobre ∂H.

30.- Sea f un campo escalar diferenciable con las siguientes propiedades

$$\left|\vec{\nabla} f\right|^2 = 4f \quad \text{y} \quad \text{div}\left(f\,\vec{\nabla} f\right) = 10f$$

Calcular la integral de superficie $\iint_S \dfrac{\partial f}{\partial n}dS$ siendo S la superficie frontera del sólido H.

31.- Probar que el valor de $\oint_C xy^2dx + (x^2y + 2x)dy$ alrededor de cualquier cuadrado, sólo depende del tamaño de éste y no de su situación en el plano.

32.- Comprobar el teorema de Gauss para el campo $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ y la región $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

33.- Calcular el flujo del rotacional del campo $\vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$ a través de la superficie $z = \sqrt{1 - x^2}$ con $-2 \leq y \leq 2$