1.9 INTEGRALES DOBLES, TRIPLES, DE SUPERFICIE Y DE LÍNEA. (50 Problemas)

1.- Calcular $I = \iint_D \frac{dx.dy}{(x^2+y^2)^2}$ siendo $D = \begin{cases} x^2+y^2-2x \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$

2.- Resolver $\iint_D x^p.y^q.(1-x-y)^r.dx.dy$ siendo D el interior del triángulo determinado por ambos ejes coordenados y la recta x + y = 1. (Integral de Dirichlet)

3.- Hallar $I = \iint_D x^2.y.\sqrt[3]{1-x^3-y^3}\,.dx.dy$ si $D = \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x^3+y^3 \le 1 \end{cases}$

4.- Determinar $I = \iint_D \arccos(x^2+y^2).dx.dy$ siendo D el dominio limitado por la curva $\rho = \sqrt{\cos\alpha}$.

5.- Calcular $I = \iint_D \frac{dx.dy}{(1+y).(1+x^2y)}$ siendo $D = \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

6.- Evaluar $\iint_R x^2 dx.dy$, donde R es la región limitada en el primer cuadrante por la hipérbola $x.y = 16$ y las rectas y = x, y = 0, x = 8

7.- Obtener, por medio de una integral doble, el área exterior a la circunferencia $\rho = 2$ e interior a la cardiode $\rho = 2.(1+\cos\alpha)$

8.- Hallar el área limitada por $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$

9.- Determinar el volumen limitado en su parte superior por el parabolide $x^2 + 4y^2 = z$, inferiormente por el plano z = 0 y lateralmente por los cilindros $y^2 = x$ y $x^2 = y$.

10.- Calcular el volumen situado en el semiespacio $z \ge 0$, limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$

11.- Obtener el volumen comprendido en el primer octante y limitado por el plano OXY, el plano z = x + y + 2 y el cilindro $x^2 + y^2 = 16$

12.- Hallar el volumen del semiespacio $z \ge 0$, comprendido entre la superficie cónica $z^2 = 2xy$ y la cilíndrica $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$.

13.- Evaluar el volumen del sólido situado en el semiespacio superior y limitado por las tres superficies z = x . y , $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

14.- Volumen encerrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ bajo la superficie $z = x^2 + y^2$

1.9 INTEGRALES DOBLES, TRIPLES, DE SUPERFICIE Y DE LÍNEA. (50 Problemas)

15.- Determinar el volumen V del cuerpo limitado por la superficie semiesférica $\left\{ x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, z \geq 0 \right\}$ y la cilíndrica $x^2 + y^2 - 2ay = 0$.

16.- Volumen limitado por las superficies, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, $z(x^2 + y^2) = 1$ y el plano $z = 0$.

17.- a) Plantear, sin resolver, el cálculo de la siguiente integral doble mediante integrales iteradas de todas las formas posibles, siendo R la región triangular de vértices (0,0) (2,0) (1,1) $\iint_R (x+y)^{x-2y}\, dx\, dy$

b) Plantear, también sin resolver, el cálculo de la misma integral del apartado anterior, mediante integrales iteradas, realizando previamente el cambio de variables definido por $u = x + y$ $v = x - 2y$

18.- ¿Es cierto que I = J para cualquier función f (x,y) integrable, siendo

$$I = \int_0^{3/2} \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dx\, dy + \int_{3/2}^{5/2} \int_{-\sqrt{-5/4+3y-y^2}}^{\sqrt{-5/4+3y-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$J = \int_{-1}^{1} \int_0^{3/2} f(x,y)\, dy\, dx + \int_{-1}^{1} \int_{3/2-\sqrt{1-x^2}}^{3/2+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$$

19.- Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Si f (x,y) > 0, ordenar de menor a mayor los siguientes números:

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 f(r,\alpha) r^4\, dr\, d\alpha$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 f(r,\alpha) r^2\, dr\, d\alpha$$

$$K = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 f(r,\alpha) r^2\, dr\, d\alpha + \int_{\pi/5}^{\pi/2} \int_0^1 f(r,\alpha) r^2\, dr\, d\alpha$$

b) ¿Es integrable la función $f(x,y) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ en el rectángulo $R = [-a, a] x [-b, b]$?

c) Escribir en coordenadas polares la integral $I = \int_0^a \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\, dx\, dy$ donde $h(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$, $g(y) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$ $0 < a < b$.

20.- Invertir el orden de integración en $\int_1^3 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\, dx$

21.- Evaluar el área de la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$ que es interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$

22.- Determinar el área de la superficie del cilindro $x^2 = 2z$ limitada por los planos $x = 2y$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$

23.- Calcular el área del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ que es interior al cilindro $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

1.9 INTEGRALES DOBLES, TRIPLES, DE SUPERFICIE Y DE LÍNEA. (50 Problemas)

24.- Calcular el área de la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$

25.- Obtener el área de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 6y$ que queda dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

26.- Evaluar el área de la parte de superficie del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$ comprendida entre la parte interior del cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$

27.- Obtener el área de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 - ay = 0$ limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

28.- Hallar el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ que está sobre el plano OXY y es interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4y$

29.- Obtener el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que es interior al paraboloide $x^2 + y^2 = z$

30.- Sea A el área superficial de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ que pertenece al primer octante y está comprendida entre los planos $y = x$, $y = \sqrt{3}\,x$ y $z = x$. Este área se puede calcular de dos formas diferentes utilizando dos tipos distintos de integración. Indicar cuáles son esas dos formas y escoger una de ellas para calcular el valor de A.

31.- Hallar el área de la porción de superficie $z^2 = 2xy$ que es interior al hemisferio superior de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

32.- Calcular $I = \iiint_D x^p . y^q . z^r .(1 - x - y - z)^s . dx . dy . dz$, siendo D el volumen que limita en el primer octante el plano $x + y + z = 1$

33.- Se considera la siguiente integral triple en coordenadas cilíndricas:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \sqrt{16-r^2}\,.z.r.dr$$

Determinar la función $f(x,y,z)$ y el recinto V de integración.

34.- Calcular $I = \iiint_D \dfrac{dx.dy.dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$, siendo D el volumen limitado por los planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 0$, $z = 1$, $z = 0$

35.- Hallar $I = \iiint_D dx.dy.dz$, siendo D el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, comprendida en el primer octante.

36.- Determinar el volumen encerrado por la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$.

37.- Resolver $I = \iiint_D \left(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2\right).dx.dy.dz$, siendo D el volumen exterior al cono $z^2 = k^2.\left(x^2 + y^2\right)$, e interior al cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

1.9 INTEGRALES DOBLES, TRIPLES, DE SUPERFICIE Y DE LÍNEA. (50 Problemas)

38.- Sea S el espacio común a las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2\,R\,z$. Se pide:

a) Calcular el volumen de S haciendo uso de coordenadas esféricas.
b) Plantear la integral que proporciona ese volumen mediante coordenadas cilíndricas, escribiendo esa integral con dos órdenes distintos de integración.
c) Plantear la integral que proporciona ese volumen mediante coordenadas cartesianas.

39.- Calcular la integral curvilínea $\int_C 2.x.y.dx - x^2.dy$ a lo largo de los diferentes caminos C que parten del origen de coordenadas y finalizan en el punto A (2,1):

a) La recta que une ambos puntos.
b) La parábola que pasando por ambos puntos es simétrica respecto al eje OY.
c) La parábola que pasando por ambos puntos es simétrica respecto al eje OX.
d) La línea quebrada OBA, siendo B (2,0).
e) La línea quebrada ODA, siendo D (0,1).

40.- Calcular la integral curvilínea $I = \int_C \frac{x.dy - y.dx}{x^2 + y^2}$

a) A lo largo de cualquier curva cerrada que no rodee al punto (0,0)
b) A lo largo de cualquier curva cerrada que rodee al punto (0,0) recorrida en sentido positivo.
c) A lo largo de la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo.

41.- Dada la integral curvilínea $I = \int_C \frac{x}{x^2 + y^2}.dx + \frac{y}{x^2 + y^2}.dy$; se pide:

a) Determinar, razonadamente, la función potencial; indicando en que punto o puntos no es válida esa función potencial y ¿por qué?
b) Obtener el valor de I a lo largo de curva $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, entre los puntos A (a,0) y B (0,b) recorrida en sentido positivo.
c) Determinar asimismo, el valor de I en los casos siguientes:
   c1) A lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, recorrida en sentido positivo.
   c2) A lo largo de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ recorrida en sentido positivo.

42.- Dada la integral curvilínea $I = \int_C \frac{x.dy - y.dx}{x^2 + y^2}$, se pide:

1º) Calcular su valor en los 3 siguientes casos, en todos los cuales la curva se recorre en sentido positivo:

a) Siendo "C" la circunferencia completa de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$.
b) Siendo "C" el arco de la circunferencia anterior que va desde el punto A(a,0) hasta B(0,a).
c) Siendo "C" el arco de la circunferencia del caso a) que va del punto B (0,a) hasta el A(a,0).

2º) Determinar la función potencial de la expresión subintegral, se pide:

d) Aplicar dicha función potencial para el cálculo de la integral del apartado b) si es posible. Justificar la respuesta.
e) Idem. Para el cálculo de la integral en el caso c).

1.9 INTEGRALES DOBLES, TRIPLES, DE SUPERFICIE Y DE LÍNEA. (50 Problemas)

43.- Dada la integral curvilínea

$$I = \int_C \frac{a\,x\,y}{z^2+1}\,.\,dx + \frac{b\,x^2}{z^2+1}\,.\,dy + \frac{1 - z^2 + c\,x^2 y\,z + m\,x}{(z^2+1)^2}\,.\,dz \text{ , se pide:}$$

a) Determinar las condiciones que deben cumplir los números reales a, b, c y m para que la expresión subintegral sea diferencial exacta.

b) Determínese, supuesto que se verifican las condiciones anteriores, la función potencial para el caso a = 2.

44.- Evaluar la integral curvilínea $\int y\,z\,.\,dx + x\,z.\,dy + x\,y.\,dz$ en los siguientes casos:

a) A lo largo de la hélice de ecuaciones $\begin{cases} x = a\,.\cos t \\ y = a\,.\,\text{sen } t \\ z = k\,.\,t \end{cases}$ cuando t varía desde 0 hasta 2π.

b) A lo largo de la circunferencia intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $y + z = a$ desde $A(0, a, 0)$ hasta $B\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ recorrida en sentido positivo.

c) A lo largo de la elipse $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ desde $A(a, 0, 3)$ hasta $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}, 3\right)$ recorrida en sentido positivo.

45.- Calcular $\int_C xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$ a lo largo de la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ recorrida en sentido positivo.

46.- Sea S la parte del cilindro $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ limitada inferiormente por $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ y superiormente por el plano $z = 4R^2$.

a) Representar S.
b) Si se parametriza S mediante: $x = R\cos\theta \quad y = R + R\,\text{sen}\,\theta \quad z = z$ ¿Cuáles son los límites de variación de los parámetros θ y z ? ¿Cuál es el vector normal de S? ¿cuál es el área superficial de S?
c) Una lámina con la forma de la superficie S está sometida a un campo de temperatura dado por $T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 9z^3$. Evaluar el flujo hacia fuera de S del campo $\vec{F} = -K\,\vec{\nabla}\,T$

1.9 INTEGRALES DOBLES, TRIPLES, DE SUPERFICIE Y DE LÍNEA. (50 Problemas)

47.- Sea C el arco de la curva dado por $xy = 3$ en $z = 0$ con $x \in [1, 3]$. Sea S la pantalla vertical apoyada en C y que queda por debajo de $x + 2y - z = 0$, sea A el área superficial de S.

a) Plantear la integral que permite obtener A, mediante una integral sobre una curva.
b) Plantear la integral que obtiene A, mediante integración doble.
c) Trabajo del campo $\vec{F} = \vec{i} + x^2\vec{j} + y\vec{k}$ sobre la curva frontera de la superficie S.
d) Volumen de H, limitado por la pantalla S, el plano $x + 2y - z = 0,\ x = 1,\ y = 1\ ,\ z = 0$.

48.- Un alambre tiene la forma dada por $x = \log t,\ y = t,\ z = 2 \quad t \in [1, e]$. Encontrar su masa, si su densidad lineal es $f(x, y, z) = \dfrac{1}{y^3}$

49.- Sea f: R $\rightarrow$ R derivable. Se define $F(a) = \iiint_{S_a} f\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV$ con $a \neq 0$, siendo S_a el sólido encerrado por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Encontrar F’ (a).

50.- El plano x + y + z =1 corta al cilindro $x^2 + y^2 = 4$ en una curva C.

a) Plantear la integral, que conduce a la longitud de C.
b) Encontrar la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva C en el punto $P\left(1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$