1.8 INTEGRALES DEFINIDAS PARTICULARES. (38 Problemas)

1.- Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x^3} . x^2 . dx$

2.- Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x^2} . x^2 . dx$

3.- Calcular $\int_0^{8} x^{-1/2} . \left(2 - x^{1/3}\right)^{1/4} dx$

4.- Calcular $\int_0^{1} x \left(1 - x^4\right)^{-1/2} dx$

5.- Calcular $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sqrt[4]{x}}}$

6.- Calcular $\int_0^{1} \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

7.- Calcular $\int_0^{1} x^a (\log x)^n dx$ siendo n un número natural.

8.- Calcular $\int_0^{\infty} x^m . e^{-x^2} . dx$

9.- Calcular $\int_0^{\infty} a^p . x^{p-1} . e^{-ax} . dx$

10.- Calcular $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^n}}$

11.- Calcular $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \left(1 + x^2\right)^2}$

12.- Calcular $\int_0^{1} \frac{x^{2p}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

13.- Calcular $\int_0^{1} x^{a-1} . \log x . dx$ siendo $a > 0$

14.- Demostrar que $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$ siendo $a > 0$.

15.- Calcular en función de $\beta(p, q)$ el valor de la integral:

$$\int_{-1}^{1} (1 + x)^{p-1} . (1 - x)^{q-1} . dx$$

1.8 INTEGRALES DEFINIDAS PARTICULARES. (38 Problemas)

16.- Calcular la integral: $\int_0^\infty \frac{2\left(1+x^2\right)}{\left(9+x^2\right)^2}\,dx$

17.- Siendo m > 0 y cumpliéndose que mq > p >0, demostrar:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{\left(1+x^m\right)^q}\,dx = \frac{\Gamma\left(p/m\right)\Gamma\left(q-p/m\right)}{m\ \Gamma(q)}$$

18.- a) Demostrar que $\Gamma(p+1) = p\ \Gamma(p)$

b) Demostrar: $\int_0^\infty x^{2p-1}.e^{-x^2}.\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(p)$

19.- Calcular las integrales: $I = \int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ $\qquad I = \int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$

20.- Demostrar que $\int_0^a x^{p-1}.(a-x)^{q-1}.\,dx = a^{p+q-1}.\beta(p,q)$

21.- Siendo p+1 > 0 y m+1 > 0 con n un número natural, demostrar:

a) $\int_0^1 x^m.\left(\log\frac{1}{x}\right)^p dx = \frac{\Gamma(p+1)}{(m+1)^{p+1}}$

b) $\int_0^1 x^m.\log x.\,dx = \frac{-1}{(m+1)^2}$

22.- Definir $\Gamma(p)$ y $\beta(p,q)$, y escribir la relación que existe entre ellas.

Demostrar que $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$ y que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

23.- Partiendo de $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx$, calcular $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$

24.- Calcular por derivación paramétrica $\int_0^b x^2\cos x\,dx$

25.- Calcular por derivación paramétrica $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}.\cos 2bx.\,dx$ sabiendo que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

26.- Calcular por derivación respecto de un parámetro $I = \int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{\ln x}\,dx$

27.- Calcular $\int_0^{\pi/2} \frac{xdx}{\operatorname{tg} x}$ sabiendo que $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2(1+a)}$

1.8 INTEGRALES DEFINIDAS PARTICULARES. (38 Problemas)

28.- Calcular $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$, sabiendo $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

29.- Calcular por derivación, respecto a un parámetro: $\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$

30.- Calcular $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ a partir de $I=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}.\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

31.- Calcular mediante derivación respecto al parámetro la integral:

$$F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1}{e^{x^2+\alpha^2/x^2}}\,dx$$

32.- Calcular $\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{\ln x}\,dx$

33.- Calcular $\int_0^1 x^\alpha.(\ln x)^n\,.dx$ para n entero y $\alpha>1$

34.- Calcular $\int_0^t \ln(1+\operatorname{tg} t\,.\operatorname{tg} x)\,dx$

35.- Calcular, mediante derivación paramétrica la siguiente integral:

$$F(\lambda)=\int_0^1 \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\right)dx \qquad \lambda>\frac{2}{\pi}$$

36.- Sabiendo que $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2-b^2}}$ calcular $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(a^2-b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}\,dx$

37.- Sabiendo que $F(\beta)=\int_0^\pi \beta\operatorname{sen}(\beta x)\,dx$, calcular el valor de $I=\int_0^\pi \left(x^2\operatorname{sen} 3x+3x^3\cos 3x\right)dx$

38.- Calcular la integral $I(a)=\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\,dx$