

1.6 FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL. (61 Problemas)

1.- Continuidad y derivabilidad de la función: $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$

2.- Una nave se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2$. Cuando apaga el motor se alejará a lo largo de la trayectoria tangente en el punto donde esté en ese momento. ¿ En qué punto debe apagar las máquinas para alcanzar el (4,15) ?

3.- Se desea recubrir con aislante la superficie exterior en contacto con el aire de un depósito apoyado en el suelo, de volumen $\frac{8000 \pi}{3} \text{ m}^3$, formado por una parte cilíndrica y una bóveda semiesférica. El material para aislar la parte cilíndrica tiene un precio de 100 euros/m² y el precio correspondiente a la bóveda es de 200 euros/m². Calcular las dimensiones de este depósito de modo que el coste del aislante sea mínimo. Obtener también dicho coste y comprobar que efectivamente es mínimo.

4.- El volumen de un cilindro circular de altura h y radio de la base r viene dado por la fórmula: $V = \pi r^2 h$. Hallar el ritmo de variación de h con relación a r, si V permanece constante al incrementarse r.

5.- Sea la ecuación $3x^2 + 2y^2 - 2x - 3y - 3 = 0$ que define a y como función implícita de x. Hallar la pendiente de la tangente a la curva en el punto (1,2).

6.- Una partícula se mueve a lo largo de la órbita circular $x^2 + y^2 = 1$. Cuando sus coordenadas son $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ su ordenada disminuye a razón de 3 unidades por segundo. ¿Con qué rapidez varía la abscisa?

7.- Hallar y clasificar los puntos críticos de la función: $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ con $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ sin utilizar el criterio de la segunda derivada.

8.- Hallar usando el concepto de diferencial el valor aproximado de la función $y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ para $x = 0'15$.

9.- Dos postes de 12 m y 28 m de altura, distan 30 m entre sí. Desea tenderse un cable, fijado en un único punto del suelo, entre los puntos de ambos postes. ¿En qué punto del suelo hay que fijar el cable para usar el mínimo cable posible?

10.- Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva siguiente $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$ en el punto (-2,3).

11.- Una escalera de 15 m se apoya en una pared vertical. Si el extremo inferior comienza a deslizarse a una velocidad de 1 m/seg. ¿Cuál será la velocidad del extremo superior en el instante en que el extremo inferior dista 5 m. de la pared?

1.6 FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL. (61 Problemas)

12.- Hallar los valores máximos y mínimos absolutos y relativos de la función $f(x) = x^2 \log x$ en el intervalo $[1, e]$.

13.- Se bombea aire a un globo esférico a razón de $4^4 \text{ cm}^3/\text{minuto}$. Hallar la razón de cambio del radio cuando éste es de 2 cm.

14.- Hallar la derivada de orden 23 de la función $f(x) = x^2 e^x$. Aplicarlo al punto $x = 0$.

15.- Sea $f(x) = \left(\frac{\log(x+1)}{\log x} \right)^x$

a) Encuentre $A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

b) Encuentre un infinitésimo equivalente a $g(x) = f(x) - A$

c) Calcular el siguiente limite $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \log \left(\frac{x-2}{x+2} \right)$

16.- Representar la función $f(x) = \cos x - \log(\cos x)$

17.- Dadas las funciones $f(x) = e^x - 1$ y $g(x) = x|x|$. Se pide:

a) Representar gráficamente $f(x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$ y $g(x)$.

b) Calcular utilizando la definición de derivada, la de las siguientes funciones: $f(|x|)$, $|f(x)|$ y $g(x)$ en el punto $x = 0$.

18.- Suponer que f es derivable, siendo la derivada $f'(x) = (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}}$. Demostrar que la función inversa de f , $g = f^{-1}$, satisface $g'(x) = \frac{3}{2} (g(x))^2$

19.- Serrando transversalmente un listón de madera en cuatro trozos, desea confeccionarse un marco rectangular. Las dimensiones del listón son 72 cm de largo por 3 cm de ancho. Se pide:

a) Encontrar las dimensiones de los trozos para que el área encerrada por el marco sea máxima.

b) Representar la función "área encerrada por el marco"

20.- Obtener una expresión que permita calcular la derivada de cualquier orden de la función $f(x) = e^x / (1+x)$. Calcular dicha derivada en $x = 0$.

21.- Calcular la derivada de $f(x) = \arg \text{Sh } x$

22.- Calcular los límites laterales de $f(x) = \left(4 - \frac{3x}{a} \right)^{\text{tg}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$ en el punto $x = a$

23.- Calcular la parte principal del infinitésimo $f(x) = \sec x - \text{tg } x$ para $x = \pi/2$

1.6 FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL. (61 Problemas)

24.- Hallar los máximos y los mínimos de $f(x) = x^3 - |x|$

25.- Dada la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse que tenga sus lados paralelos a los ejes.

26.- Dada la familia de parábolas $y = (m + 3)x^2 - (2m - 1)x + m - 1$ donde m es un parámetro variable, demostrar que todas las parábolas de la familia pasan por un punto fijo y tienen en él la misma tangente. Encontrar las coordenadas de ese punto y la ecuación de dicha tangente.

27.- Se da un punto $(1, 2)$ en coordenadas cartesianas. Por este punto obtener la ecuación de una recta que forme junto con los semiejes positivos un triángulo de área mínima.

28.- Indicar si son ciertas las siguientes afirmaciones justificando la respuesta:

a) Si $f(x)$ es una función periódica de periodo 2 con $f'(1) = 0$ entonces $f'(3) = 0$

b) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ y $|g(x)| \leq k$ para todo $x > 5$ entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

29.- Hallar la derivada n -ésima de la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$

30.- Hallar la derivada n -ésima de la función $f(x) = \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x$

31.- Hallar la derivada n -ésima de la función $f(x) = \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x$

32.- Hallar los máximos y los mínimos de $f(x) = \frac{2(x-1)}{x} - \log x^2$

33.- Hallar los máximos y los mínimos de $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ con $x \in (0, 2\pi)$

34.- Hallar los máximos y los mínimos de

$$f(x) = e^x \operatorname{sen} x \quad \text{con} \quad x \in (-2\pi, 2\pi)$$

35.- Hallar los máximos y los mínimos de $f(x) = x^4 (4a^2 - x^2)$

36.- Calcular los límites de las siguientes funciones:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} nx - n \operatorname{tg} x}{n \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} nx} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 - (\pi/4)^2}{\sqrt{x-1}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 - 1}{x^2}$$

37.- Calcular los límites de las siguientes funciones:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}/2} \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2 - \pi^2/16}{2x^2 - 1}$$

1.6 FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL. (61 Problemas)

38.- Calcular los límites de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x}{x^5}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\log(1+x))^x$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

39.- Calcular los límites de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot g x)^{\operatorname{tg} x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \operatorname{sen} ax - b^x \operatorname{sen} bx}{c^x \operatorname{sen} cx - d^x \operatorname{sen} dx}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos px}{\log \cos qx}$

40.- Hallar la ecuación de la recta tangente y de la normal a la curva de ecuación $x^3 + x^2 \operatorname{sen}(2y) + y^2(x+1) = 9$ en el punto (0, 3)

41.- Estudiar el tipo de discontinuidad de la función $f(x) = 2^{\left(\frac{1}{2^{1-x}}\right)}$

42.- Si f y g son funciones derivables en \mathbb{R} con $f(3)=k$ entonces la función $h(x) = f(x^2) + g(f(3))$ es derivable y además $h'(3) = f'(3^2) + g'(f(3))$ ¿Es cierto?. Obtener el valor de $h'(x)$.

43.- Hallar la asíntota oblicua de la función $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}$.

44.- Hallar la asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{2xe^x}{e^x - 1}$

45.- Representar gráficamente la función $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$

46.- Representar gráficamente la función $f(x) = x \sqrt{3-2x}$

47.- Representar gráficamente la función $f(x) = x^2 \ln x$

48.- Representar gráficamente la función $f(x) = xe^{1/x}$

49.- Aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \log x$ en el intervalo $[x, x+1]$. Utilizando las consecuencias de este teorema demostrar que para cada número real $x > 0$ se verifica: $\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$

50.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = E(x)$ siendo $E(x)$ la parte entera de x .

51.- Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = \frac{1}{x} [|x+1| - |x-1|]$

52.- Calcular la derivada de $y = \log \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

1.6 FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL. (61 Problemas)

53.- Calcular la derivada de $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$

54.- Calcular la derivada de $y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{\operatorname{sen} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{sen} x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{sen} x}$

55.- Calcular la derivada: $y = \frac{2}{\operatorname{sen} a} \log \frac{\operatorname{tg} x/2 + \operatorname{tg} a/2}{\operatorname{tg} x/2 - \operatorname{tg} a/2}$

56.- Siendo $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^2(x + a)}$ calcular el valor de a si se cumple $f'(-3) = 0$

57.- Utilizando la definición de límite probar que: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x - 5) = 7$

58.- Dada $f(x) = \frac{x^2 - x}{\operatorname{sen} \pi x}$ con $x \in (0, 1)$ definir $f(0)$ y $f(1)$ de forma que sea continua en $x \in [0, 1]$

59.- Estudiar la existencia de límite de $f(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{e^{\operatorname{tg} x} + 1} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

60.- Estudiar la continuidad de $f(x) = \frac{\log(x^2 - 3x + 2)}{\log(x^2 - 7x + 12)}$

61.- Dada la ecuación: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = x^3$, se realiza el cambio $x = e^t$. Escribir la ecuación considerando a "y" dependiente de "t".