1.5 SERIES DE POTENCIAS. SERIES DE TAYLOR. (43 Problemas)

1.- Dada la función $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x^2+1}}$

a) Desarrollo en serie en un entorno x = 0.
b) Radio de convergencia.
c) Calcular $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1'08}}$ con error menor que 10^{-5}.

2.- Desarrollar en serie de potencias de x las funciones: $y(x) = e^{xCha}.Ch(x.Sha)$ y de $z(x) = e^{xCha}.Sh(x.Sha)$

3.- Desarrollar en serie de potencias de x la función $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Hallar radio de convergencia y estudiar los casos limites (sólo la convergencia).

4.- Desarrollar en serie de potencias de x las siguientes funciones:
$f(x) = e^{x\cos a}.\cos(x.\operatorname{sen} a)$ $g(x) = e^{x\cos a}.\operatorname{sen}(x.\operatorname{sen} a)$

5.- Hallar el desarrollo en serie de potencias de x-1 , hasta el orden 4 de la función $f(x) = \dfrac{\log x}{x+2}$

6.- Hallar el desarrollo en serie de la función : $f(x) = \log(x^2+3x+2)$. Estudiar su radio de convergencia.

7.- a) Desarrollar en serie $y = \operatorname{arctg} x$.
b) Estudiar su convergencia.
c) Obtener $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots\ldots$
d) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

8.- Desarrollar en serie de Taylor la función $f(x) = \cos^3 x$

9.- Calcular el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = (\operatorname{arc\,sen} x)^2$

10.- Calcular los cinco primeros términos del desarrollo en serie de la función $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

11.- Obtener el radio y el campo de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1).2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{2n}$

12.- Dada la función $f(x) = \dfrac{-\ln(1-x)}{x}$

a) Dominio.
b) Definir f (0) para que sea continua.
c) Desarrollar f (x) en torno a $x_0=0$ y calcular el radio de convergencia.

1.5 SERIES DE POTENCIAS. SERIES DE TAYLOR. (43 Problemas)

13.- Obtener el campo de convergencia y la función suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

14.- Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$

a) Obtener radio y campo de convergencia.

b) Sumar dicha serie. Se considera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$

c) Sumar dicha serie.

d) Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)\,2^{2n+1}}$

15.- Desarrollar la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en potencias de x-2 y hallar el campo de convergencia.

16.- Dada $f(x) = (x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - \log\sqrt{1+(x+1)^2}$

a) Desarrollar en serie de potencias, radio y campo de convergencia.

b) Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}(2n+1)(2n+2)}$

17.- a) Encontrar el desarrollo de $g(x) = \log(1+x)$ en potencias de x, indicando el campo de convergencia. Utilizar para ello el desarrollo de g' (x).

b) Encontrar el desarrollo de $f(x) = (1+x)\log(1+x)$ en potencias de x, indicando el campo de convergencia.

c) Determinar el orden del infinitésimo f (x) del apartado anterior.

18.- Dada la función $f(x) = (1+x)e^{-x} - (1-x)e^{x}$, se pide:

a) Determinar el desarrollo en serie de Mac Laurin a partir del desarrollo de e^x.

b) Indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

19.- Sea $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$

a) Encontrar el desarrollo de f (x) en potencias de x y el campo de convergencia de la serie obtenida, haciendo uso de la serie geométrica.

b) Encontrar el desarrollo, mediante la fórmula del binomio.

20.- Dada la función $f(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Desarrollar en torno al origen y obtener el radio y el intervalo de convergencia.

21.- Dada la función $f(x) = \log\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}\right)$

a) Desarrollo en torno al origen.

b) Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{3n}.8.(3n+3)}$

1.5 SERIES DE POTENCIAS. SERIES DE TAYLOR. (43 Problemas)

22.- Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{n!}$

a) Radio y campo de convergencia.

b) Sumar la serie sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

23.- Resolver la ecuación $y' = x^2 + y$ buscando una solución en forma de serie de potencias. Suponer $y(0) = y_0$.
Estudiar intervalo y radio de convergencia.

24.- Resolver la ecuación $y' = \frac{2x - y}{1 - x}$, buscando una solución en serie de potencias. Suponer $y(0) = y_0$. Estudiar intervalo y radio de convergencia.

25.- Resolver la ecuación $y'' + y = 0$ en serie de potencias de x.

26.- a) Encontrar el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n+4)!} (x-1)^{n+4}$

b) Encontrar el campo de convergencia.

c) ¿Es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ uniformemente convergente en los reales?

d)Obtener el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = \frac{4}{3x+2}$ estudiando su convergencia.

e) ¿Cuándo la derivada de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ coincide con $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$?

27.- Utilizando desarrollos calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log \frac{e^x - 1}{x}$

28.- Hallar p para que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x) - x - x^3/3}{x^p}$ sea un número finito distinto de cero.

29.- Calcular utilizando desarrollos el $\lim_{x \to 0} \frac{6x \operatorname{cosec} x - x^2 - 6}{x^4}$

30.- Desarrollar en serie $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. Calcular el radio y el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

31.- Desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = \log(a + bx)$ con a >0 y b > 0. Calcular el radio de convergencia.

32.- Desarrollar $f(x) = (1 + e^x)^2$. Calcular intervalo y radio de convergencia.

1.5 SERIES DE POTENCIAS. SERIES DE TAYLOR. (43 Problemas)

33.- Desarrollar en serie de Taylor la función $f(x) = \cos^3 x$

34.- Hallar el siguiente límite mediante desarrollos en serie de potencias

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$$

35.- Hallar el límite $\lim_{x \to a} \frac{x^{1/2} - a^{1/2}}{f(x) - 1}$ siendo $f(x) = \log_a x$

36.- Obtener el polinomio de Taylor de grado tres en x = 0 de la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}$
Hallar una cota del error cometido cuando tomamos como valor de f (x), dicho polinomio de tercer grado.

37.- Calcular el límite aplicando el desarrollo en serie de Taylor

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x) - x^3}{x^5}$$

38.- Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \, . \, 2^n}$. Indicar el campo de convergencia.

39.- Representar en serie de potencias de x la función $\sqrt{1+x}$ y usar el desarrollo obtenido para calcular $\sqrt{1'1}$ comprobando que los cuatro primeros términos del desarrollo permiten obtener dicho valor con cuatro cifras decimales exactas.

40.- a) Deducir el desarrollo en serie $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots$
b) Utilizando los tres primeros términos del desarrollo del apartado a) calcular log 2 e indicar el error cometido.

41.- Sea $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 5$. Encontrar el desarrollo en serie de potencias de x-1 de la función f (x). Encontrar la primitiva de $f(x)/(x-1)^5$

42.- Encontrar el valor de $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ con error menor que 10^{-2}

43.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 y estimar el error cometido cuando $0 \le x \le 1/2$