## 1.4 SERIES NUMÉRICAS.SUMA DE SERIES. (46 Problemas )

1.- Estudiar el carácter de las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{na^n}$ si a >0, según valores de a.

2.- Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!}$ sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

3.- Estudiar la serie de término general $a_n = \frac{\log_n a}{\log_a n}$.

4.- Consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, en donde $a_n = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^a}$

a) Estudiar la convergencia para a=1 y a=2
b) Determinar con a=3 el valor de su suma con error menor que 0'008.

5.- Estudiar el carácter de la serie, según los valores del parámetro $\lambda \neq 0$

$a_n = \lambda^n \frac{n^2+1}{3^n}$

6.- Calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(3n-8)(3n-5)(3n+4)}$$

7.- Dada la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{9n^2+10n+1}}$

a) Estudiar su convergencia.
b) ¿Es convergente absolutamente?
c) Dar una cota del error cometido si se aproxima la suma por la suma parcial segunda.

8.- a) Estudiar el carácter de: $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+3}{n^2+4}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2+4}{n^2+3}$

b) ¿Cuántos términos de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ deben tomarse para aproximar la suma con un error menor que 0'1?. $c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$

9.- Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ siendo a >0.

10.- Estudiar el carácter de la serie cuyo término general es:

$$a_n = \frac{\log 2.\log 3\ldots.\log(n+1)}{\log(2+a).\log(3+a)\ldots.\log(n+1+a)} \quad \text{con } a>0.$$

## 1.4 SERIES NUMÉRICAS.SUMA DE SERIES. (46 Problemas )

11.- Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$. Estudiar el mínimo número de términos que han de tomarse para aproximarla con un error menor que $10^{-3}$.¿Qué se puede deducir de este resultado?

12.- Estudiar el carácter de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2+\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2+4}$

13.- Dada la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}\right)^P \quad P>0$

a) valores de P ($P \neq 2$) , para los cuales la serie converge absolutamente.
b) Valores de P, para los cuales la serie converge.
c) Estudiar en P = 2, la convergencia de la serie.

14.- Estudiar el carácter de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+2)^{n+2}}$. ¿Tiene sentido hablar del $\lim_{n\to\infty} S_n$ ?

15.- Estudiar los valores de $P \in R$ con $P > 0$ para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\operatorname{sen}\frac{\pi n^2}{2n^2+1}\right)^P$ es convergente.

16.- Determinar para qué valores de $x \in [-4,+\infty)$ es convergente y para cuáles no la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n n!}{(n+1)(n+2)....(2n+1)}$

17.- Estudiar la convergencia y si lo es, la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

18.- Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

19.- Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$ estudiar:

a) Convergencia absoluta.
b) Convergencia.

20.- a) Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$

b) Encontrar $a_n$, tal que $\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}=a_{n+1}-a_n \quad \forall n \in N$

c) Calcular la suma de la serie.

(Nota: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}$ )

21.- Calcular el valor de x para que se cumpla: $1+4x+9x^2+16x^3+....=12$

1.4 SERIES NUMÉRICAS.SUMA DE SERIES. (46 Problemas )

22.- Estudiar la convergencia en caso afirmativo sumarla: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)^2-1}$ $\quad n\in N$

sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{1}{n}=\log 2$

23.- Hallar $\sum_{n=1}^{\infty} b^n.\cos nw$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b^n \operatorname{sen} nw$ con $|b|<1$

24.- Dada la serie $\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}-\frac{1}{8.9.10}+\ldots$

a) Estudiar su convergencia.

b) Hallar su suma sabiendo que $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{\pi}{4}$

25.- Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a^n}{n!(n+2)}$ con $a\in R$

a) Estudiar su convergencia $\forall\ a\in R$

b) ¿Qué podemos afirmar sobre la convergencia de la serie para a = -2 ?

26.- Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión monótona decreciente tal que $a_n>0\ \forall\ n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

Demostrar que si $S_n$ es la suma parcial n-ésima de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, entonces

$\left|S_n-\lim_{n\to\infty} S_n\right|<a_{n+1}\quad \forall\ n>1$

27.- Calcular la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(2+3n)\frac{\cos n\alpha}{2^n}$

28.- Para cada una de las siguientes afirmaciones decir si es cierta o si es falsa, demostrando o poniendo un contraejemplo según convenga:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales es acotada.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$ converge.

c) Si $a_n\geq 0\quad\forall\ n\in N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ converge.

d) Si $\{a_n\}_n\subseteq R$ es una sucesión acotada, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}$ converge

29.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ en los casos $a\leq 1$ y $a>1$

30.- Estudiar el carácter de las series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^n}{(n-1)^{n+2}}$

## 1.4 SERIES NUMÉRICAS.SUMA DE SERIES. (46 Problemas )

31.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(3n+1)\sqrt[n]{2n+4}}$

32.- Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+2}\right)^n$

33.- Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{2n}}$

34.- Sumar la serie $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots.$

35.- Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ por descomposición de su término general.

36.- Estudiar según valores de x >0 la convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2.3\ldots.n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$

37.- Estudiar la convergencia y en su caso sumar: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4^n}(2^n - 1)$

38.- Sumar la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2(n^2-1)}$ sabiendo que $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

39.- Estudiar la convergencia de la serie: $1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} - \ldots\ldots$

40.- Estudiar la convergencia de la serie:

$$\frac{11}{1.7.13} + \frac{11.17}{1.7.13.19} + \ldots + \frac{11.17.23\ldots(11+6(n-1))}{1.7.13\ldots.(1+6(n+1))} + \ldots$$

41.- Estudiar la convergencia y si es posible sumar, la serie.

$$\frac{11}{1.7.13.19} + \frac{11.17}{1.7.13.19.25} + \ldots + \frac{11.17.23\ldots(11+6(n-1))}{1.7.13\ldots.(1+6(n+2))} + \ldots$$

42.- Estudiar la convergencia de la serie $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1.2} + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2.3} + \frac{\operatorname{sen}3\alpha}{3.4} + \ldots. + \frac{\operatorname{sen}n\alpha}{n(n+1)} + \ldots$ siendo $\alpha$ un ángulo dado.

43.- Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n b^{n^2}}{n}$ $a > 0$ $b > 0$, estudiar su convergencia y convergencia absoluta según los valores de a y b.

1.4 SERIES NUMÉRICAS.SUMA DE SERIES. (46 Problemas )

44.- Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n^a}$ con $x \in [0, \pi]$ $a \in R$, según valores de x y a.

45.- Utilizando el criterio integral demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente para los valores $0 < r < 1$. ¿Se puede utilizar el criterio integral si $r = -1/2$ ?

46.- Demostrar que las series armónicas generalizadas son convergentes si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ con } p > 1 \text{ y divergentes si } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad 0 < p \leq 1$$