1.3 SUCESIONES. LIMITES DE SUCESIONES. (43 Problemas)

1.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[P]{(n+a_1)(n-a_2)....(n+a_P)}-n\right)$

2.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\log n)^2}{n}$

3.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)}$

4.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2.4.6...2n}$

5.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^x....\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^x}$

6.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^P+2^P+...+n^P}{n^{P+1}}$ $\quad P\in N \quad P>0$

7.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}...\binom{n}{n}}$

8.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+....+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

9.- Demostrar que las sucesiones $a_n=1-\operatorname{sen}\dfrac{\pi n^2}{2n^2+1}$ y $b_n=2\left(\dfrac{\pi}{4(2n^2+1)}\right)^2$ son equivalentes.

10.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\operatorname{tg}^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}$

11.- a) Probar que la función $y=\dfrac{\log(1+x)}{x}$ es decreciente e inferior a 1 para $x>0$

b) Sea u_0 un número real positivo. Demostrar que la sucesión definida por $u_n=\log(1+u_{n-1})$ con $n\geq 1$ es convergente.

12.- Sean a_0 y b_0 tales que $0<a_0<b_0$: Se construyen dos sucesiones de la siguiente manera:

$$a_1=\frac{2a_0\,b_0}{a_0+b_0},\quad b_1=\frac{a_0+b_0}{2},\quad a_{n+1}=\frac{2a_n\,b_n}{a_n+b_n},\quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\qquad n\geq 1$$

a) Demostrar que $a_n<b_n \ \forall\ n\geq 1$
b) ¿ Son $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ monótonas ?
c) ¿ Son convergentes ?

13.- Probar, utilizando la definición de límite, que el límite de la sucesión de término general $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ es 1

1.3 SUCESIONES. LIMITES DE SUCESIONES. (43 Problemas)

14.- Comprobar que el límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{n^3}{3n^3+2}$ es $\dfrac{1}{3}$

15.- Sean a, b ∈ R con 0 < a < b. Se construyen las sucesiones

$\{a_n\}$ y $\{b_n\}$: $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n+b_n}$ $\forall\, n \in N \quad n \geq 1$.

Probar:

a) $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes.

b) $b_n - a_n = b - a \quad \forall\, n \in N$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

16.- Dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ estudiar si son crecientes o decrecientes sabiendo que:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n\, b_n}{a_n + b_n} \quad \text{y} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

17.- Dada la sucesión $a_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$ $n \geq 1$ probar:

a) $\{a_n\}$ es creciente y acotada.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3/2$

18.- Dada la sucesión: $a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}$ estudiar su convergencia y hallar su límite.

19.- Sea $a_1 = x_1 > 0$ con $x_n = \dfrac{x_{n-1}.(1+x_{n-1})}{1+2x_{n-1}}$ si $n \geq 2$.

Demostrar que $\{x_n\}$ con $n \in N$ es una sucesión monótona decreciente y convergente. Calcular su límite.

20.- Dada la equivalencia $e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cong \dfrac{e}{2n}$, resolver:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ siendo $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}.e^{-n}$

b) Buscar una sucesión equivalente para $b_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

c) Determinar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[e - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]$

21.- a) calcular $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n.\,\mathrm{sen}\,\dfrac{x}{2^n}$.

b) Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de término general $u_n = \log\cos\dfrac{x}{2^n}$. Encontrar el término general de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ para que $u_n = a_{n-1} - a_n - \log 2 \quad n \geq 1$.

c) Encontrar $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y la suma en caso de que exista.

1.3 SUCESIONES. LIMITES DE SUCESIONES. (43 Problemas)

22.- Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{2n-1}{2n}$

23.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión en el conjunto de los números reales. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Indicar para qué valores de a se tiene la equivalencia.

24.- Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = 0$.

25.- Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ mediante la definición de limite.

26.- Probar que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de términos generales $a_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\frac{\pi}{k}$ $b_n = \log n$ son del mismo orden. ¿Son equivalentes?

27.- Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{\log n}}$

28.- Hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2]{2}+\sqrt[4]{3}+\sqrt[6]{6}+\sqrt[8]{11}+\ldots}{5n+3}$

29.- Hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{\log (n)^n}{\log (2n)!}$

30.- Calcular $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{16}....\cos\frac{\pi}{2^n}$

31.- Utilizando la regla del Sandwich, calcular $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right]$

32.- Utilizando la regla del Sandwich, calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{5\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)\sqrt{n^2+n}}\right]$$

33.- Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{u_1/1+u_2/2+\ldots+u_n/n}{\log n}$

34.- Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right).\left(1+\frac{2}{n^2}\right).....\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

1.3 SUCESIONES. LIMITES DE SUCESIONES. (43 Problemas)

35.- Calcular el límite de la sucesión: $4\log\frac{5}{1}, 5\log\frac{13}{3}, 6\log\frac{23}{7}, 7\log\frac{35}{13}, \ldots.$

36.- Demostrar que si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, entonces su límite es único.

37.- Demostrar que si $x_n \le a_n \le y_n \quad \forall\ n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$

38.- Estudiar el carácter de la sucesión $\{n\cos n\}_{n=1}^{\infty}$

39.- Utilizando el criterio integral resolver: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n.2n}}\right)$

40.- Demostrar que si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son monótonas crecientes, de números reales positivos y la sucesión $\{a_n - b_n\}$ está acotada superior e inferiormente, entonces la sucesión $\left\{\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}\right\}$ es convergente.

41.- a) Dada la sucesión $\{a_n\}$ definida por $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 4n + a_{n-1} \quad n > 1 \end{cases}$ probar por inducción que $\forall n \in N$, $\left|a_n - 2n^2\right| < 2n$

b) A partir de la sucesión anterior se define $b_n = \frac{a_n}{2n^2}$. Estudiar si $\{b_n\}$ está acotada y calcular su límite.

42.- Dada la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_1=7$ $\quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + 2}{a_n + 1}} \quad n \in N$

a) Probar que $a_n \ge 1 \ \forall \ n \in N$

b) Demostrar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y calcular su límite.

43.- Demostrar que si una sucesión a_n cumple $a_n \to 0$, entonces las sucesiones a_n y $b_n = \log(1+a_n)$ son equivalentes. Encontrar una sucesión equivalente a $\log_a(1+a_n)$ cuando $a_n \to 0$