1.2 NUMEROS COMPLEJOS. (58 Problemas)

1.- Sea f la aplicación de C en C, tal que al número complejo z le hace corresponder el número complejo $W = f(z) = (1 + i\sqrt{3})\, z + \sqrt{3}\,(1 - i)$

a) Hallar el complejo x imagen de sí mismo.

b) Si x,z,w son los afijos de X,Z,W respectivamente, probar que el triángulo de vértices XZW es rectángulo cualquiera que sea z.

c) Hallar el módulo, el argumento y logaritmo neperiano de $y = \dfrac{w - x}{z - x}$

2.- Resolver la ecuación: $2\,e^{\frac{i}{z}} - 1 - \sqrt{3}\, i = 0 \qquad z \in C$

3.- Calcular $z = \log_{2-2i}(1 + i)$.

4.- Dados z_1 y z_2 números complejos conocidos, hallar el lugar geométrico de los afijos de z si la parte real de $\dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ es nula. Indicar la figura resultante y representar.

5.- Encontrar el lugar geométrico de los números complejos z tales que $\dfrac{\pi}{2}$ es el argumento de $\dfrac{z+1}{z+2}$ Representar

6.- Expresar en la forma más simplificada posible, el número complejo: $\alpha_0 = tg\left(i \log\left(\dfrac{a+bi}{a-bi}\right)\right)$

7.- Considerar la expresión $A + Bi$ donde $A = 1 + \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} + \ldots + \dfrac{\cos 6\alpha}{\cos^6\alpha}$

$B = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{sen\,2\alpha}{\cos^2\alpha} + \ldots + \dfrac{sen\,6\alpha}{\cos^6\alpha}$ .Obtener valores de a $\left(0 < a < p/2\right)$ para los cuales dicha expresión es un número imaginario puro.

8.- Determinar los valores de a y de α de modo que $\alpha = \log_{a+i}(i)$ sea un número real.

9.- Sabiendo que $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos t$, calcular $z^n + \dfrac{1}{z^n}$ con $z \in C$.

10.- Calcular la parte real e imaginaria de $\left(\dfrac{1 + sen\,x + i\cos x}{1 + sen\,x - i\cos x}\right)^m$

11.- Resolver $5\,tg\,z = 2\,sen^2 z + \dfrac{3}{\cos^2 z}$ con $z \in C$.

12.- Calcular $z \in C$ tal que $\cos z = 3$

13.- Sean r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 las raíces quintas de 1. Estudiar el valor de la expresión: $E = r_1^n + r_2^n + r_3^n + r_4^n + r_5^n$ cuando n = 1, 2, 3, 4, 5, 6......

14.- Obtener $z \in C$ tal que: $\cos z = Chz$.

15.- Hallar el módulo y el argumento de $\dfrac{1}{z^n + 1}$ siendo $z = e^{ai}$ y $n \in Z^+$

1.2 NUMEROS COMPLEJOS. (58 Problemas)

16.- Todo número complejo de módulo unidad se puede poner bajo la forma $\dfrac{1+ia}{1-ia}$

Calcular el valor de a y aplicar dicho resultado a $-e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

17.- Demostrar que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad vale cero, y que su producto es 1 ó –1.

18.- Obtener $x \in \Re$ tal que: $\left(\dfrac{1+xi}{1-xi}\right)^6 = \dfrac{3+4i}{3-4i}$

19.- Obtener $z \in C$ tal que: $Ch^2 z + Sh^2 z + Th^2 z = 1$

20.- Hallar el complejo $z = x + yi$ tal que A, B y C vértices de un triángulo rectángulo en A, sean los afijos de z, z^2 y z^3 respectivamente.

21.- Encontrar las raíces de la ecuación compleja $z^7 - \overline{z} = 0$.

22.- Calcular el valor principal de $w = i^{\cos z}$

23.- Hallar el valor de $E = (1+\sqrt{3}\,i)^n + (1-\sqrt{3}\,i)^n$

24.- Demostrar que $|z-\omega| \geq \big|\,|z|-|\omega|\,\big| \quad \forall\, z, \omega \in C$

Encontrar para qué valores de b el conjunto siguiente está acotado en módulo:

$$A = \left\{ \frac{z+2}{z-8} \;/\; z \in C \;\; \text{siendo } z\,.\,\overline{z} = b^2 \right\}$$

25.- Siendo α un argumento del complejo z, encontrar el valor de:

$$A = \frac{\cos\alpha . \cos 2\alpha \ldots\ldots \cos n\alpha}{(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\ldots.(z^n+\overline{z}^n)}$$

26.- Encontrar el lugar geométrico de los números complejos z tales $z^2 + a^2 = 1$, si a recorre la parte no negativa del eje real.

27.- a) Calcular $|z|$ si $z^n - \overline{z} = 0$

b) Sin calcularlos, ¿cuántos números complejos verifican que $z^n - \overline{z} = 0$? (siendo $n \in N$ fijo)

28.- Demostrar que si $z \in C$, $z \neq \pm 1$, entonces $\arg\coth z = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{z+1}{z-1}$. ¿Para qué valores reales se verifica la igualdad?

1.2 NUMEROS COMPLEJOS. (58 Problemas)

29.- ¿ Es cierto que $\left|\operatorname{sen}(x+iy)\right| = \left|\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(iy)\right|$ para cualesquiera x e y reales?

30.- a) ¿Es cierto que $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$ para cualquier $z \in C$?

b) ¿Es cierto que $|z+1| \geq |z|$ para cualquier $z \in C$?

31.- a) Haciendo uso de la fórmula de Euler, demostrar que $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$.

b) Para $\alpha \in R$ y $n \in N$ fijos, indicar cuántas soluciones tiene la ecuación $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n = e^{\alpha i}$.

Encontrar dichas soluciones.

32.- Sea a un número real positivo y $z = x + iy$.

a) Comparar los módulos de los números $(z+a)e^{z}$ y $(z-a)e^{-z}$

b) Probar que las raíces de la ecuación $(z+a)e^{z} + (z-a)e^{-z} = 0$ son imaginarias.

33.- encontrar el lugar geométrico descrito por el afijo de $z = \left(\dfrac{2}{1+\omega}\right)^2$ si el afijo de ω describe $|\omega| = 1$.

34.- Si z es un número complejo, $|z|$ es su módulo y R (z) su parte real. Estudiar el conjunto $|z| + R(z) \leq 1$ estudiando si está acotado y qué dominio ocupa.

35.- Hallar las raíces de la ecuación $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0$

36.- Hallar z, tal que $\operatorname{tg} z = \dfrac{3i}{5}$

37.- Resolver: $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^4 = \dfrac{1+i\operatorname{tg}\theta/2}{1-i\operatorname{tg}\theta/2}$ siendo θ dado.

38.- Hallar $S_n = 1 + i + i^2 + \ldots + i^n$ con $n \geq 0$ entero para

$$n = \dot{4} \quad n = \dot{4}+1 \quad n = \dot{4}+2 \quad n = \dot{4}+3$$

39.- Si z y ω son dos números complejos conjugados, calcular: $(z+\omega)(z^2+\omega^2)\ldots(z^n+\omega^n)$

40.- Descomponer el polinomio

$$P(z) = z^6 - 2z^3\cos\theta + 1 \qquad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

en producto de tres polinomios de grado 2 con coeficientes reales. ¿ Pueden ser los afijos de las raíces de la ecuación P (z) = 0 los vértices de un exágono regular?

1.2 NUMEROS COMPLEJOS. (58 Problemas)

41.- Indicar si es cierto:

a) La función logaritmo es $2\pi i$-periódica sobre los complejos.

b) La función seno hiperbólico es $2\pi i$-periódica sobre los complejos.

42.- En base al comportamiento del módulo con el producto de números complejos, acotar los módulos de $\dfrac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}$ cuando $|z| = 2$ (sabiendo $|z + \omega| \geq \big||z| - |\omega|\big|$)

43.- Sean z_1 y z_2 las raíces de la ecuación $z^2 - 2e^{\theta i}z + 1 = 0$, $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$.

a) Hallar la relación que existe entre los módulos de z_1 y z_2 y la que existe entre sus argumentos.

b) Hallar los valores de θ para los cuales z_1 y z_2 son reales y los valores de θ para los cuales z_1 y z_2 son imaginarios puros.

44.- Dado el complejo $\alpha = e^{\theta i}$ en donde θ es un número real. Determinar los posibles argumentos del número complejo $z = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$

45.- Expresar en forma binómica los números complejos α y β sabiendo :

a) La parte principal de $\log(\alpha . \beta)$ es $\dfrac{3\pi}{2}i$

b) Una de las raíces de $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ es $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

46.- Indicar la parte real e imaginaria de $w = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}\right)^4 \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$

47.- Calcular los complejos z_1, z_2, z_3, tal que cumplen:

$$\left.\begin{array}{l} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 . z_2 . z_3 = 1 \end{array}\right\}$$

48.- Hallar el lugar geométrico de los afijos de los números complejos α tales que $\left|\dfrac{\alpha+2}{\alpha-1}\right| = 3$

49.- Si $\alpha \neq 1$ es una raíz cúbica de la unidad, demostrar que $(1 + \alpha^2)^4 = \alpha$

50.- Utilizando números complejos probar que: $\cos 3x = \cos x .(\cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x)$

51.- Expresar en forma binómica $w = \text{Th}\left(\log 3 + \dfrac{\pi i}{4}\right)$

1.2 NUMEROS COMPLEJOS. (58 Problemas)

52.- Determinar, de la forma más simplificada posible, la parte real y la parte imaginaria de cos z siendo z un número complejo.

53.- Dado $a + bi = \log\sqrt{w}$ siendo w tal que $\dfrac{w}{1+i\sqrt{3}}$ es real y el módulo de w es unidad. Hallar a+bi

54.- Sea $u = \mathrm{Re}\left(\log\dfrac{x+iy+a}{x+iy-a}\right)$. Demostrar que $x^2 + y^2 - 2ax\dfrac{1}{\mathrm{Th}\,u} + a^2 = 0$, siendo a, x e y constantes.

55.- Ordenar de mayor a menor los módulos de los números complejos (parte principal si es preciso), $z_1 = \dfrac{2-i}{4+2i}$ $\quad z_2 = \mathrm{Ch}(2 - i\pi)$ $\quad z_3 = (1+e)^{i/10}$

56.- Encontrar todas las soluciones en el plano complejo de la ecuación $\mathrm{sen}\,z + \cos z = i\sqrt{2}$

57.- Determinar si el conjunto está acotado indicando en caso afirmativo una cota superior y una cota inferior $A = \left\{ \left|\mathrm{Re}\left(iz^3 + 1\right)\right| + \dfrac{\left|z^2+1\right|}{\left|z^2 + 2z + 1\right|} \ / \ |z| = 2 \right\}$

58.- Determinar si el conjunto $A = \left\{ z \in C \ / \left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| < 2 \right\}$ está acotado. Representar el conjunto A