1.1 INDUCCION. DESIGUALDADES. VALOR ABSOLUTO. (34 Problemas)

1.- Demostrar por el método de inducción: $\sum_{K=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \in N$

2.- Demostrar por el método de inducción: $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ es múltiplo de 7 $\forall\, n \in N \cup \{0\}$

3.- Demostrar por el método de inducción: $10^{n} + 3.4^{n+2} + 5$ es múltiplo de 9, $\forall\, n \in N$

4.- Demostrar que $6(1 + 7 + 7^{2} + \ldots + 7^{n}) + 1 = 7^{n+1}$ para $n \in N$

5.- Demostrar que $(1+p)^{n} > 1 + pn$ donde $p > 0$ y $n > 1$

6.- Demostrar que $(2n)! < 2^{2n}.(n!)^{2}$ para cualquier n natural. Hacerlo por inducción y luego directamente.

7.- Demostrar la desigualdad $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$ con n natural.

8.- Sea $P_{n} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n}$, demostrar que $P_{n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ para todo n natural.

9.- Demostrar que $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24} \quad \forall \quad n > 1$ con n natural.

10.- Demostrar que $\frac{2^{2n-1}}{2} < \binom{2n}{n} < 2^{2n-1} \quad \forall\, n \in N$ con $n > 1$

11.- Usar el método de inducción para probar que $x^{n} - y^{n}$ es múltiplo de $x - y$, $\forall\, n \in N$, siempre que $x \neq y$

12.- Demostrar que $3^{3n+3} - 26n - 27$ es múltiplo de 169.
Utilizar $m^{n} - 1 = (m-1)(m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + m + 1)$ con n natural.

13.- Demostrar $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3} \ldots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \quad \forall\ n > 1$ con n natural.

14.- Demostrar $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1}$ con n natural.

15.- Demostrar por el método de inducción la fórmula siguiente:
$$\sum_{j=1}^{p} \frac{p}{j(j+1)\ldots(j+p)} = \frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!} \quad \forall\, n \in N \quad \text{siendo } p \in N \text{ fijo.}$$

1.1 INDUCCION. DESIGUALDADES. VALOR ABSOLUTO. (34 Problemas)

16.- Demostrar por el método de inducción, la fórmula siguiente $4^n > n^2$ con $n \in N$ $n \geq 2$

17.- Demostrar por el método de inducción, $(1+a)^n > 1 + na \; \forall \; n > 1$ con n natural y $a \in R^+$

18.- Demostrar que:

a) $\sum_{k=0}^{n} ar^k = a\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

b) $\frac{1-e^{nbi}}{1-e^{bi}} = e^{i\frac{n-1}{2}b}\;\frac{\operatorname{sen} nb/2}{\operatorname{sen} b/2}$

19.- Demostrar que si $x \in R$ y $|x| \leq 2$ entonces se verifica

$$\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq 15$$

20.- Poner como un intervalo el conjunto:

$$\left\{ x \in R \,/\, \big||x-1| - |x+1|\big| \leq 1 \right\}$$

21.- Escribir con notación de intervalos el siguiente conjunto:

$$A = \left\{ x \in R \,/\, \big||x+1| - 2\big| < 1 \right\}$$

22.- Escribir en forma de intervalo el conjunto de los números reales que verifican la siguiente desigualdad $|x-2| + |x+2| + \frac{2x-2}{x+1} < 8$

23.- Demostrar que $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$ para cualquiera x e y en los reales.

24.- Escribir con notación de intervalos el conjunto: $\left|2+\frac{5}{x}\right| > 1$

25.- Escribir con notación de intervalos el conjunto: $\big||x| - 2\big| \leq 1$

26.- Encontrar el conjunto de cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de A si existen.

$$A = \left\{ x \in R \,/\, x = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{m},\; n, m \in N \right\}$$

1.1 INDUCCION. DESIGUALDADES. VALOR ABSOLUTO. (34 Problemas)

27.- Estudiar la acotabilidad de A, encontrando si es posible su supremo, su ínfimo, su máximo y su mínimo.

$$A=\left\{\frac{n+1}{n}\left(1+(-1)^n\right) / \ n\in N\right\}$$

28.- Encontrar supremo, máximo, ínfimo y mínimo, si es posible, del conjunto:

$$A=\left\{x\in R \ / \ x^2-2x+1-\frac{1}{n^2}=0 \qquad n\in N\right\}$$

29.- Dado el conjunto: $A=\left\{y\in R \ / \ y=\left|\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{|x|+8}\right| \qquad x\in R\right\}$ encuentre si es acotado y si lo es, determinar el conjunto de cotas superiores e inferiores.

30.- Hallar las cotas inferiores y superiores y los extremos del conjunto:

$$A=\left\{x\in R \ / \ x^2+\frac{2-n}{n}x+\frac{1-n}{n^2}=0 \qquad n\in N\right\}$$

31.- Dado el conjunto $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{2^n} \ / \ n\in N\right\}$ encontrar: cotas inferiores, ínfimo, y mínimo, cotas superiores, supremo y máximo en los reales si existen.

32.- Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.

33.- Probar la siguiente implicación:

$$|\,x\,|\leq 1 \quad\Rightarrow\quad \left|x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\right|<2$$

34.- Se considera el conjunto de números reales

$$A=\left\{x\in R \ / \ x^2+3x+2<0\right\}$$

Hallar las posibles cotas así como el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de este conjunto, si existen.